

APLICAÇÃO DE UMA ABORDAGEM INTERACTIVA BASEADA EM PONTOS DE REFERÊNCIA A UM PROBLEMA MULTIOBJECTIVO DE LOCALIZAÇÃO-TRANSPORTE

Maria João Alves¹
João Clímaco

Resumo: Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa interactiva de soluções eficientes num problema multicritério de localização-transporte. É utilizado um procedimento interactivo de pesquisa direccional que foi desenvolvido para problemas genéricos de programação linear inteira e inteira-mista multiobjectivo [1]. O problema de localização-transporte em estudo consiste em seleccionar locais para abrir estações de tratamento de resíduos tóxicos e determinar os trajectos e quantidades de material a transportar desde as fontes de resíduo até às estações de tratamento. Este modelo foi proposto por Coutinho-Rodrigues et al. [3(b), 4] e instâncias do modelo foram já estudadas usando um sistema de apoio à decisão desenvolvido pelos mesmos autores [3,4].

Palavras-chave: multiobjectivo, transporte, localização.

Abstract:

Keywords:

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho pretende mostrar a aplicação de um procedimento de pesquisa interactiva de soluções eficientes a um problema multicritério de localização-transporte. A abordagem interactiva proposta [1] assenta no uso de pontos de referência para efectuar pesquisas direccionais e destina-se a problemas de programação linear inteira e inteira-mista multiobjectivo. Esta abordagem combina estratégias multicritério baseadas em pontos de referência – em particular, a métrica de

Tchebycheff – com técnicas de branch-and-bound.

Assumindo um protocolo simples de interacção com o agente de decisão (AD), em cada fase de diálogo o AD apenas deve especificar um novo ponto de referência ou indicar uma função objectivo (critério) que pretende melhorar relativamente à solução eficiente anterior. É neste último caso que se desencadeia uma *pesquisa direccional*, havendo lugar a um “varrimento” de soluções eficientes ao longo de uma direcção particular. Esta direcção assegura o melhoramento do critério escolhido pelo AD.

¹ Faculdade de Economia, Universidade de Coimbra / INESC Coimbra, PORTUGAL, mjoao@inescc.pt

Cada solução eficiente (não dominada) é obtida pela otimização de um problema escalarizante que projecta um ponto de referência do espaço dos critérios no conjunto das soluções não dominadas. O problema escalarizante usado nesta abordagem é o seguinte:

$$P(\underline{z}^+) \min \quad \alpha - \rho \sum_{i=1}^k \underline{c}^i \underline{x}$$

$$\text{s.a:} \quad \underline{c}^i \underline{x} + \alpha \geq z_i^+ \quad i=1, \dots, k$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \underline{x} \geq \underline{0}$$

em que $A\underline{x} = \underline{b}$ representa as restrições funcionais do problema, k é o número de funções objectivo e \underline{c}^i é o gradiente da função objectivo i . Assume-se que todas as funções objectivo são a maximizar. A função objectivo i é, assim, definida por “ $\max z_i = \underline{c}^i \underline{x}$ ”. O ponto de referência é $\underline{z}^+ = (z_1^+, \dots, z_k^+)$. Se \underline{z}^+ for superior a todos os pontos dos critérios admissíveis, então este programa determina a solução cujo ponto dos critérios $\underline{z} = (\underline{c}^1 \underline{x}, \dots, \underline{c}^k \underline{x})$ minimiza a distância (aumentada) de Tchebycheff a \underline{z}^+ . A variável α dá o valor dessa distância. Mas α nem sempre representa uma distância e, por isso, não pode ter restrição de sinal, porque se o ponto de referência for atingível, então $P(\underline{z}^+)$ já não representa a minimização de uma distância. O termo $-\rho \sum_{i=1}^k \underline{c}^i \underline{x}$, em

que ρ é uma constante positiva pequena, perturba a métrica de Tchebycheff para uma métrica *aumentada*. Esta perturbação garante que qualquer solução óptima de $P(\underline{z}^+)$ é eficiente do problema multiobjectivo. Note-se que, na ausência deste termo, poder-se-iam encontrar soluções que são apenas fracamente eficientes.

Se o AD escolher um critério, seja z_j , que pretende melhorar relativamente ao valor da solução eficiente anterior (*pesquisa direccional*), o procedimento actualiza automaticamente o ponto de referência \underline{z}^+ incrementando (ou decrementando, se z_j for a minimizar) z_j^+ e mantendo as outras componentes iguais. A variação de z_j^+ é

determinada por uma fase de análise de sensibilidade/pós-otimização. Como se pode observar em $P(\underline{z}^+)$, as componentes de \underline{z}^+ são os termos independentes das k primeiras restrições do problema escalarizante. A fase de pós-otimização analisa, então, a variação do termo independente de uma restrição de $P(\underline{z}^+)$. Trata-se de um processo iterativo que utiliza e compara informação proveniente dos nós terminais da árvore de branch-and-bound correspondente à solução óptima de $P(\underline{z}^+)$ para analisar os efeitos da variação de z_j^+ . O incremento de z_j^+ faz-se de modo a assegurar que a solução eficiente seguinte seja próxima mas diferente da anterior. Em problemas multiobjectivo de programação inteira-mista existem soluções contínuas que podem ser conhecidas através de variações muito pequenas de \underline{z}^+ . Mas, ao longo de uma mesma direcção de pesquisa, podem ser necessárias grandes variações de \underline{z}^+ para poder “escapar” da solução anterior e “saltar” uma descontinuidade nas soluções eficientes. A pesquisa direccional é, assim, um processo de varrimento de soluções ao longo de uma dada direcção, produzindo soluções contínuas (a menos de um passo controlado pelo AD) enquanto tal for possível, e saltando automaticamente as descontinuidades, quando tal for imperativo.

A informação proveniente da árvore de branch-and-bound anterior permite, não só a análise de sensibilidade que altera o ponto de referência, como também constitui o ponto de partida para o cálculo da solução eficiente seguinte. Assim, para resolver $P(\underline{z}^+)$ com \underline{z}^+ modificado, o procedimento começa por actualizar alguma informação que foi preservada nos nós terminais da árvore de branch-and-bound anterior e, se necessário, procede depois a novas ramificações para atingir novamente o óptimo. Com o intuito de não ter uma árvore cada vez maior, o que acarretaria dificuldades de manuseamento e de espaço, tenta-se simplificá-la antes de proceder a novas

ramificações. A simplificação consiste em cortar ramos que eliminam partes da árvore. Os cortes da árvore relacionam-se com a existência de limitações de variáveis (do tipo $x_i \leq K_i$ ou $x_i \geq K_i+1$) que deixaram de estar activas no novo problema escalarizante. Esta forma de aproveitar a árvore de branch-and-bound anterior para os cálculos seguintes permite diminuir os tempos computacionais, em muitos casos de forma significativa, resultando pesquisas mais rápidas. Para mais detalhes sobre esta abordagem interactiva, veja-se [1].

Esta abordagem interactiva foi aplicada a um problema de localização-transporte formulado segundo um modelo multiobjectivo de programação linear inteira-mista. O problema consiste em seleccionar um sub-conjunto de locais, de entre um conjunto pré-definido, para abrir estações de tratamento de resíduos tóxicos e estabelecer as rotas de transporte dos materiais (e respectivas quantidades) desde os locais geradores até às estações de tratamento.

A minimização do custo deve, obviamente, ser considerada neste tipo de decisões. Mas, dado o perigo envolvido no transporte e tratamento de materiais tóxicos, a minimização do risco e a sua distribuição espacial (equidade na distribuição) têm também um papel muito importante [5]. Current e Ratick [5] propuseram um modelo multicritério para este tipo de problemas. O modelo considera 5 funções objectivo que, como os autores referem, estão, em geral, em conflito: “por exemplo, uma solução que minimiza o custo irá enviar grandes quantidades de materiais através de vias de menor custo; isto levará a que as populações ao longo dessas vias fiquem expostas a elevados riscos; por outro lado, otimizar o critério da equidade do transporte conduz a que pequenas quantidades sejam transportadas por um elevado número de vias o que tende a incrementar o custo e o risco total envolvido, mas reduz a exposição máxima a que um indivíduo está sujeito”.

O modelo proposto em [5] considera, por uma questão de facilidade, que os materiais não podem ser transportados através de locais geradores ou locais potenciais para as estações de tratamento. Esta opção no sentido de simplificar o problema, poder-se-ia, contudo, justificar em certos casos por questões de segurança. Baseando-se neste modelo, Coutinho-Rodrigues et al. propõem um outro [3(b), 4] que ultrapassa esta questão sem ter necessidade de modificar a rede que representa espacialmente o problema. É este o modelo que adoptamos neste trabalho.

Os problemas de localização-transporte que envolvem materiais perigosos deparam-se, em geral, com três tipos de dificuldades [3]. São problemas inteiros ou inteiros-mistos muitas vezes difíceis de resolver, mesmo em casos monocritério. Por outro lado, o número de soluções eficientes pode crescer exponencialmente com o tamanho do problema. E, por último, quando o número de funções objectivo aumenta, a análise de compromissos entre as várias alternativas (soluções) torna-se cada vez mais difícil.

Coutinho-Rodrigues et al. [3, 4] desenvolveram um sistema de apoio à decisão interactivo dedicado a este tipo de problemas. As soluções eficientes são geradas usando o método dos pesos (optimização de somas pesadas das funções objectivo), podendo incluir-se restrições nos valores das funções objectivo. A consideração destas restrições adicionais permite alcançar soluções eficientes não suportadas. As soluções são calculadas usando ‘software standard’ de optimização de problemas de programação linear inteira-mista. Segundo os autores, a apresentação das soluções são os “olhos” do sistema. É usada uma técnica de representação gráfica designada por BAGAL (‘Best Against Least’). Nesse gráfico, cada solução é representada sob a forma de teia-de-aranha podendo ser facilmente comparada com a solução ideal e a anti-

ideal – soluções que definem os contornos interno e externo do BAGAL.

Neste trabalho propomos uma nova abordagem para o problema. O processo de cálculo de soluções eficientes, já referido atrás, baseia-se no uso pontos de referência o que permite alcançar qualquer solução eficiente, incluindo as não suportadas.

A instância do problema que estudaremos a seguir usa dados inspirados num problema real. Os dados foram nos facultados pelos autores do modelo, e correspondem à rede estudada em [4] (em [3] foi estudado um problema simplificado deste).

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja $G=(N,A)$ uma rede composta por um conjunto de nós N e um conjunto A de arcos dirigidos (i, j) que ligam o nó i ao nó j . Seja $N=(F, W, T)$ em que F é o conjunto de estações de tratamento potenciais, W é o conjunto de fontes de resíduo/material tóxico e $T=N\setminus\{F\cup W\}$ é o conjunto dos outros nós (nós de transporte) que são apenas pontos de passagem. Considerem-se ainda as seguintes definições:

X_{ij} – (variável) quantidade de resíduo enviada do nó i para o nó j .

Y_j – (variável binária) $Y_j = 1$ se a estação de tratamento $j \in F$ é aberta e $Y_j = 0$ no caso contrário.

w_i – quantidade de resíduo gerada em $i \in W$ num dado período de tempo.

a_{ij} – população total a menos de uma distância D do arco (i,j)

a_j – factor de densidade populacional junto ao local da estação $j \in F$

c_{ij} – custo, por unidade de resíduo, de atravessar o arco (i,j)

f_j – custo fixo de abrir a estação $j \in F$

h_j – custo de operação, por unidade de resíduo, da estação $j \in F$

k_j – capacidade máxima da estação $j \in F$

A formulação do problema é a seguinte:

$$\min Z_1 = \sum_i \sum_j a_{ij} X_{ij}$$

$$\min Z_2 = \sum_{j \in F} a_j \left(\sum_i X_{ij} - \sum_i X_{ji} \right)$$

$$\min Z_3 = M$$

$$\min Z_4 = P$$

$$\min Z_5 =$$

$$\sum_i \sum_j c_{ij} X_{ij} + \sum_{j \in F} \left(f_j Y_j + h_j \left(\sum_i X_{ij} - \sum_i X_{ji} \right) \right)$$

Sujeito a:

$$\sum_j X_{ij} - \sum_j X_{ji} = w_i \quad \forall i \in W \quad (1)$$

$$\sum_i X_{ij} - \sum_i X_{ji} \leq k_j Y_j \quad \forall j \in F \quad (2)$$

$$\sum_i X_{il} - \sum_i X_{li} = 0 \quad \forall l \in T \quad (3)$$

$$\sum_i X_{ij} - \sum_i X_{ji} \geq 0 \quad \forall j \in F \quad (4)$$

$$\sum_i X_{il} \leq M \quad \forall l \in T \quad (5)$$

$$X_{ij} \leq M \quad \forall (i,j) \text{ com } i \text{ e } j \in W \cup F \quad (6)$$

$$\sum_i X_{ij} - \sum_i X_{ji} \leq P \quad \forall j \in F \quad (7)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \quad (8)$$

$$Y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in F \quad (9)$$

O conjunto de restrições (1) assegura que todo o resíduo gerado é enviado das fontes para outros nós; (2) proíbe que seja retido resíduo numa estação se ela não for aberta (i.e. $Y_j=0$) e, caso seja aberta, restringe a retenção de resíduo à sua capacidade máxima; (3) são equações de equilíbrio que impõem que todos os nós de transporte (T), que não são nem fontes nem estações de tratamento, funcionem

apenas como nós de passagem; (4) complementa (2) para estabelecer as condições de equilíbrio nos nós de estações potenciais quando estes funcionam apenas como pontos de passagem (i.e., estações fechadas). As restrições (5) e (6) definem o valor da variável M que representa o máximo risco a que um indivíduo fica exposto devido ao transporte de resíduo. Este índice de risco é quantificado pela maior quantidade de resíduo que atravessa algum nó de passagem (T) ou uma ligação directa entre uma fonte (W) e uma estação (F). O conjunto de restrições (7) define o valor da variável P que representa o máximo risco a que um indivíduo fica exposto devido ao processamento nas estações. Este índice de risco é quantificado pela maior quantidade de resíduo que é processado em alguma estação. (8) assegura o transporte de quantidades não-negativas (não necessariamente inteiras) e (9) estabelece a natureza binária das decisões de localização.

As funções objectivo Z_1 e Z_2 são critérios de minimização de risco em que Z_1 representa o risco total do transporte e Z_2 o risco total do processamento nas estações. As funções objectivo Z_3 e Z_4 representam critérios de equidade em que se minimiza a máxima exposição a que um indivíduo está sujeito devido ao transporte de resíduo (Z_3) e devido ao processamento nas estações (Z_4). A função objectivo Z_5 minimiza o custo total que inclui os custos de transporte e custos de operação do sistema, fixos e variáveis.

A instância do problema em estudo considera uma rede com 50 nós, em que 4 são estações de tratamento, 15 são fontes de resíduos tóxicos e 31 são nós de transporte. A rede tem 113 arcos não dirigidos que podem ser atravessados em ambos os sentidos, o que corresponde a 226 arcos dirigidos. Na formulação, este problema assume 232 variáveis: 226 variáveis X_{ij} , 4 variáveis binárias Y_j , e as variáveis auxiliares M e P . Há 107

restrições (excluindo as de não-negatividade): 15 restrições do tipo (1), 4 do tipo (2), 31 do tipo (3), 4 do tipo (4), 31 do tipo (5), 18 do tipo (6) e 4 do tipo (7).

Para maior clareza de notação, na secção seguinte utilizaremos F_j para designar $j \in F$ e, analogamente, W_i e T_l para $i \in W$ e $l \in T$, respectivamente.

3. APLICAÇÃO DO SISTEMA DE APOIO À DECISÃO AO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO-TRANSPORTE

3.1. BREVE DESCRIÇÃO DO SISTEMA

A abordagem interactiva baseada em pontos de referência [1], cujas características principais foram apresentadas na secção 1, está integrada num sistema computacional desenvolvido em DELPHI para ambiente Windows. O sistema inclui um editor de problemas em formato de “folha de cálculo”, procedimentos de cálculo e meios gráficos de interacção com o AD e apresentação de resultados. Uma descrição deste sistema encontra-se em [2].

A pesquisa interactiva baseada em pontos de referência constitui o módulo principal do sistema. O diálogo com o AD assenta na especificação de níveis de aspiração para os critérios (pontos de referência) ou indicação do critério que o AD pretende melhorar relativamente a uma solução prévia – *pesquisa direccional*. Como complemento desta informação, o AD pode ainda impor limites nos valores dos critérios. São restrições adicionais que garantem que as soluções eficientes obtidas durante uma pesquisa direccional são progressivamente melhores no critério escolhido sem que nunca sejam piores que determinados níveis noutros critérios. Contudo, o AD pode desejar adquirir um conhecimento inicial mais global acerca do problema antes de proceder a pesquisas mais focadas como as pesquisas direccionais. Para tal, o AD

pode requerer o cálculo das soluções eficientes que otimizam individualmente cada uma das funções objectivo (que compõem a tabela de “pay-off” e definem a solução ideal) e/ou algumas soluções eficientes dispersas obtidas a partir de somas pesadas das funções objectivo. Todos os resultados que o AD considere interessantes podem ser guardados na memória do sistema (e/ou em disco) para avaliação e comparação posterior.

O sistema inclui diferentes meios gráficos e numéricos de apresentação de resultados. Os valores das funções objectivo das soluções eficientes calculadas podem ser visualizados sob vários formatos gráficos – barras, pontos ou linhas – e sob a forma numérica, com opções de ordenação. A apresentação habitual dos valores das variáveis é a numérica. O sistema inclui ainda uma representação em rede para problemas com estruturas de rede semelhantes àquela que abordamos neste trabalho. Em problemas inteiros puros bi-critério ou tri-critério (que não é o caso aqui tratado), o espaço dos pontos de referência é também apresentado graficamente. Trata-se da representação de regiões (áreas) de pontos de referência que conduzem à mesma solução eficiente. Esta decomposição em regiões de indiferença dá indicações ao AD de conjuntos de pontos de referência que conduzem a soluções eficientes já

conhecidas, pelo que a sua exploração é desnecessária.

Ao longo do estudo do problema serão descritas, com maior detalhe, algumas das características gráficas e de interacção com o AD.

3.2 ESTUDO DO PROBLEMA E ILUSTRAÇÃO DO FUNCIONAMENTO DO SISTEMA

Nesta secção iremos apresentar resultados da aplicação do sistema de apoio à decisão ao problema de localização-transporte. A pesquisa interactiva de soluções eficientes tentará ilustrar o funcionamento do sistema em geral, e do algoritmo de pesquisa direccional em particular. Será feita uma análise de cada uma das soluções eficientes obtidas para o problema.

Iniciámos o processo de pesquisa com o cálculo das 5 soluções eficientes que minimizam individualmente cada uma das funções objectivo. Dado que estas soluções nos dão um conhecimento geral de estratégias de decisão extremas, faremos uma análise mais detalhada destas soluções. Elas dão-nos uma percepção inicial das gamas de valores dos critérios, informação importante para que o AD possa identificar mais tarde soluções de compromisso.

As características destas soluções são as seguintes.

	Z_1 (min)	Z_2 (min)	Z_3 (min)	Z_4 (min)	Z_5 (min)
Solução 1	1 467 210	25 955 000	8 040	15 630	3 701 069
Solução 2	2 939 590	15 592 500	14 460	34 650	3 223 059
Solução 3	3 799 851	21 770 318	1 682.7	13 462	3 579 522
Solução 4	2 137 958	23 388 750	6 370	8 662.5	3 367 100
Solução 5	3 324 450	23 677 500	9 410	25 410	2 597 166

Solução 1 – solução eficiente que minimiza Z_1 (risco total do transporte).

A solução que minimiza o risco total do transporte considera a abertura de todas as estações de tratamento. Isso acarreta um elevado risco total nas estações (Z_2) e um custo também muito elevado

(relembre-se os custos fixos para abertura de todas as estações). As maiores exposições individuais ao resíduo (riscos individuais Z_3 e Z_4) são moderados. Este plano contempla uma rede pouco “densa” em termos de utilização de vias de transporte (veja-se a fig. 1). As estações F_1 , F_2 , F_3 e F_4 processam,

respectivamente, 640, 5780, 15630 e 12600 unidades. Note-se que a estação com maior processamento é F_3 ($15630=Z_4$) que é também aquela que se situa no local com maior população – daí que Z_2 seja elevado. A maior exposição individual durante o transporte (Z_3) é 8040 dada pela ligação W_2-F_4 .

A fig. 1 é cópia da janela do sistema que mostra as características da rede da solução. As vias de comunicação usadas estão a traço mais grosso com indicação do respectivo sentido. As estações de tratamento ('FAC') fechadas têm o formato ■ e as abertas (que nesta solução são todas) têm formato □. Na figura, os nós fontes de resíduos tóxicos são designados por 'WASTE' e os nós de transporte por 'TN'. Durante a utilização do sistema, o analista pode visualizar, para cada nó, o total de resíduo que entra (+), o que sai (-) e a respectiva diferença (+/-). Esta característica é visível na fig. 1

– posicionando o cursor num qualquer nó, neste caso o nó 'FAC' 2, a barra de estado (no fundo na janela) mostra a respectiva informação.

Repare-se na fig. 1 que todo o resíduo gerado em W_{12} (880) é enviado pelo percurso $W_{12}-T_{11}-F_3$ quando existe uma via de ligação directa $W_{12}-F_3$. Apesar de contra-intuitivo, este facto é explicado pela existência de elevada população (a_{ij}) em $W_{12}-F_3$ o que condiciona exclusivamente a 1ª função objectivo, aquela que se pretende minimizar nesta solução. A população em $W_{12}-F_3$ é representada pelo coeficiente 70 enquanto que em $W_{12}-T_{11}-F_3$ é de apenas 17 o que diminui Z_1 em 46640 face à hipótese $W_{12}-F_3$. Contudo, o percurso adoptado sacrifica o custo em 31116.8 face a $W_{12}-F_3$.

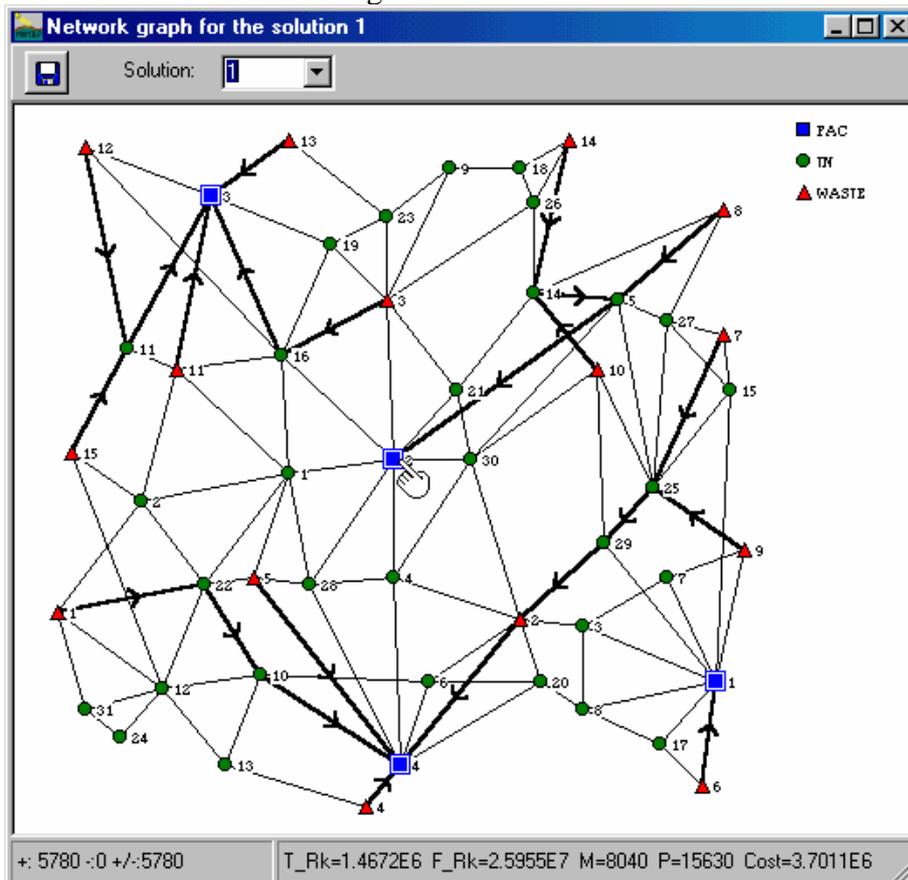


Fig. 1 – Rede da solução 1.

Solução 2 – solução eficiente que minimiza Z_2 (risco total nas estações de tratamento).

Em contraste com a solução 1, esta solução considera a abertura de apenas uma estação de tratamento, F_4 , que é a que se situa no local com menos população, pelo que minimiza o risco total nas estações (Z_2). Contudo, como é a única estação, os riscos individuais são muito elevados. Note-se que o valor de Z_4 (maior exposição nalguma estação) é

máximo (34650) dado que todo o resíduo é processado na mesma estação. Há, assim, um grande desequilíbrio entre as populações sujeitas a risco. A população de F_4 , apesar de pouca, é muito sacrificada. O custo total é menor do que na solução 1. A maior exposição individual durante o transporte (Z_3) é 14460 dada pela ligação W_2-F_4 . Nesta via passa o resíduo proveniente de 7 fontes, quase metade do total das fontes, o que representa cerca de 40% do total do resíduo. A fig. 2 apresenta as características espaciais desta solução.

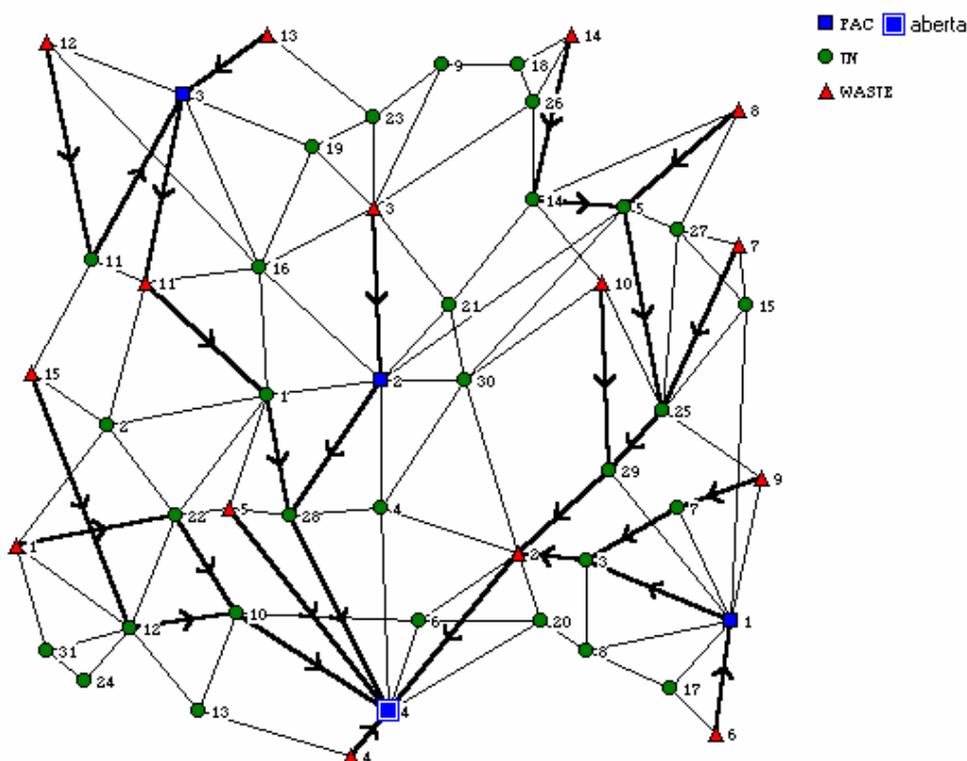


Fig. 2 – Rede da solução 2.

Solução 3 – solução eficiente que minimiza Z_3 (maior exposição individual durante o transporte).

Tal como na solução 1, também esta solução considera a abertura de todas as estações de tratamento, só que, neste caso, a rede de utilização de vias de transporte é muito “densa” (veja-se a fig. 3). As vias e nós de passagem são muitos, mas são atravessados por baixas quantidades de resíduo – a maior é

1682.7 e atravessa 70% dos nós de transporte activos (que, por sua vez, são 84% do número total dos nós de passagem ‘TN’) e atravessa também todas as ligações $W-F$ excepto $W_{12}-F_3$. A maior quantidade processada (Z_4) é 13462 em F_4 e a menor é 5252 em F_2 (para além do processamento, este nó funciona também como ponto de passagem). O custo total é elevado.

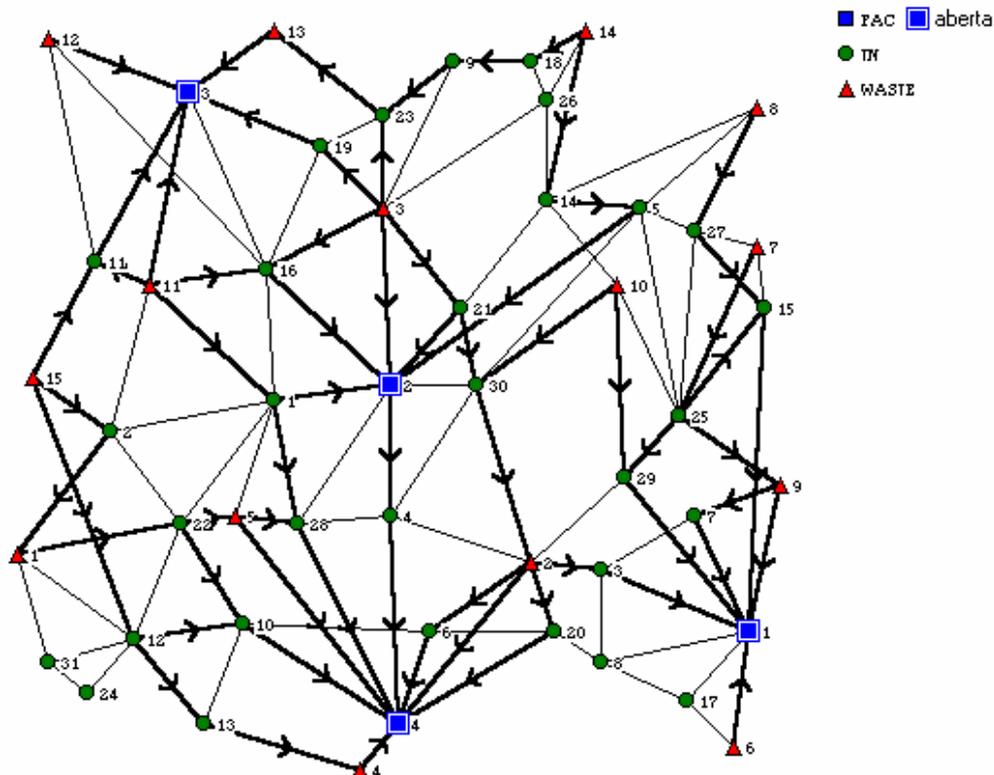


Fig. 3 – Rede da solução 3.

Solução 4 – solução eficiente que minimiza Z_4 (maior exposição individual devido ao processamento nas estações).

Tal como nas soluções 1 e 3, também esta solução considera a abertura de todas as estações de tratamento (veja-se a fig. 4). Como Z_4 visa a minimização da maior quantidade processada, a quantidade total de resíduo é dividida em partes exactamente iguais (8662.5) pelas 4 estações. Resultam valores relativamente elevados para o risco total das populações nas estações (Z_2) e custo total (Z_5). A maior exposição durante o transporte (Z_3) é 6370 e refere-se à ligação W_3-F_2 .

Observa-se na rede da fig. 4 que, tal como na solução 1, o resíduo de W_{12} é enviado primeiro para T_{11} e deste para F_3 quando existe uma ligação directa $W_{12}-F_3$. Com esta configuração privilegia-se Z_1 em detrimento de Z_5 (custo) porque estas vias são menos populosas, mas têm custos de transporte mais elevados. A solução que apenas difere desta na utilização de $W_{12}-F_3$, em vez de $W_{12}-T_{11}-F_3$, é também eficiente e óptima alternativa para Z_4 . Os valores de Z_2 , Z_3 e Z_4 nessa solução são iguais aos da solução 4, e $Z_1=2\ 184\ 598$, $Z_5=335\ 983$.

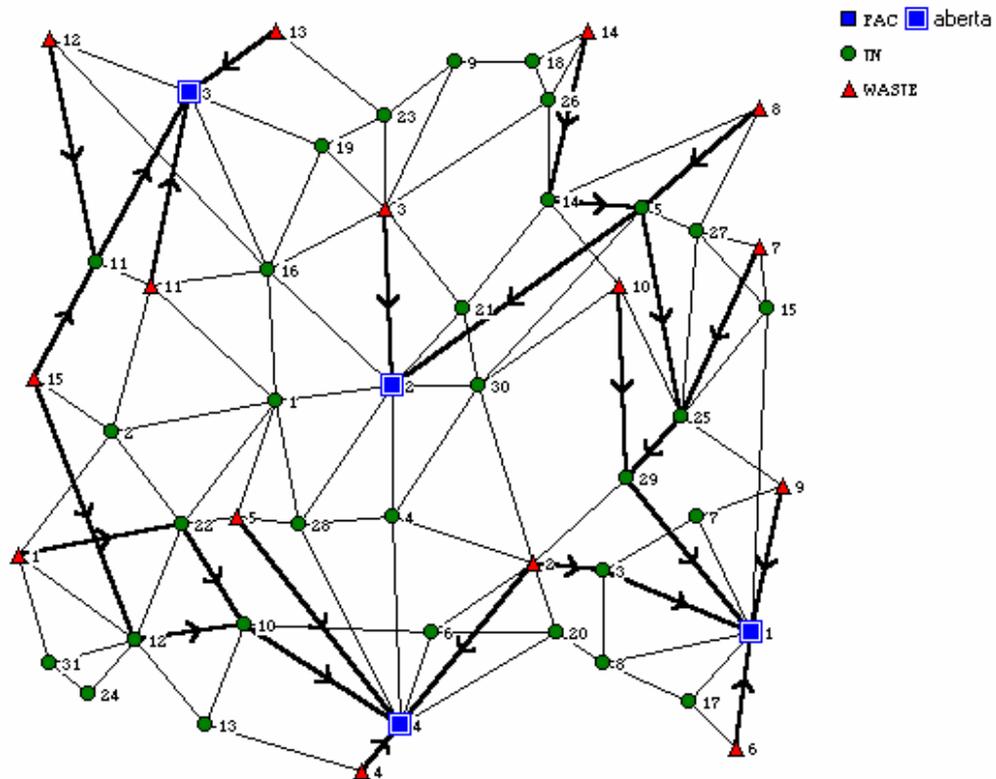


Fig. 4 – Rede da solução 4.

Solução 5 – solução eficiente que minimiza Z_5 (custo total).

O menor custo total é conseguido pela abertura de 2 estações de tratamento, F_1 e F_2 (fig. 5). Ressalta que, embora F_4 apresente os menores custos de abertura e de operação, ela não é aberta. Todas as outras funções objectivo têm valores

relativamente elevados. Contudo, nenhuma delas atinge o máximo. A maior quantidade processada (Z_4) é 25410 em F_2 . A estação F_1 processa 9240 unidades. A maior exposição durante o transporte (Z_3) é 9410 na ligação W_3-F_2 .

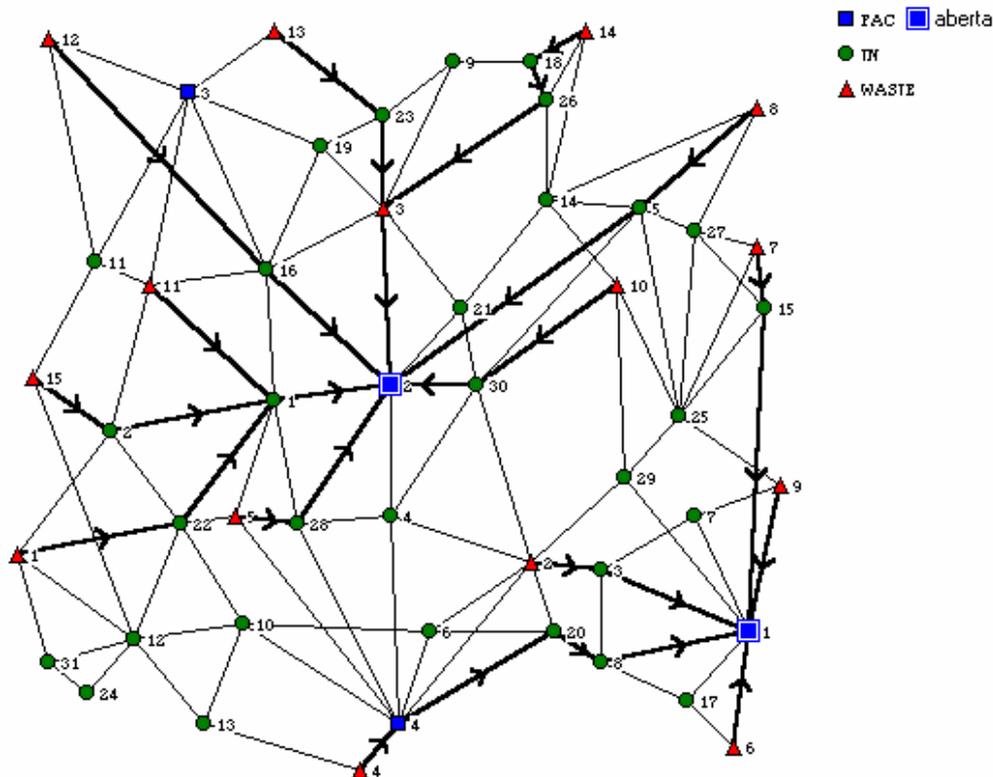


Fig. 5 – Rede da solução 5.

Conhecidas as 5 primeiras soluções, decidiu-se então calcular a solução eficiente que minimiza a distância de Tchebycheff (L_∞) ao ponto ideal $Z^* = (1467210, 15592500, 1682.7,$

$8662.5, 2597166)$. Obteve-se a solução 6 ao fim de um tempo de cálculo de 1.15 seg (computador Pentium II, 350MHz).

	Z_1 (min)	Z_2 (min)	Z_3 (min)	Z_4 (min)	Z_5 (min)
Solução 6	2 536 719	16 662 009	24 275	31 085	3 666 675

É uma solução relativamente desequilibrada nos valores das funções objectivo: Z_1 é moderado e Z_2 bastante baixo, mas o valor de Z_3 é o maior encontrado até ao momento e é quase o dobro do maior das soluções anteriores. Também Z_4 e Z_5 estão próximos dos máximos conhecidos. Esta solução considera a abertura das estações F_2 e F_4 . Em F_4 são processadas 31085 unidades (valor de Z_4) das quais 24275 (valor de Z_3) passam na ligação W_2-F_4 .

Note-se que não houve qualquer normalização prévia das funções objectivo e, como estas têm escalas diferentes, houve um “privilégio” de Z_2 , em detrimento das outras, visto que é Z_2 a

função objectivo com maior ordem de grandeza de valores.

A fig. 6 mostra gráficos de barras para as 6 soluções calculadas. Esta figura, assim como as seguintes, são cópias de janelas do sistema onde a letra ‘F’ designa ‘Função objectivo’. O sistema usa a mesma cor (tom de cinzento) para soluções com partes inteiras iguais que, neste problema, são aquelas que consideram a abertura das mesmas estações de tratamento. As opções de visualização disponíveis nesta janela são:

- gráficos de barras;
- gráficos de linhas;
- pontos no espaço dos critérios (apenas disponível para 2 e 3 funções objectivo);
- opção

disponível para os gráficos de barras e que permite (através de uma caixa de diálogo) escolher a opção de ordenação: por ordem crescente ou decrescente do

índice da solução (como na fig. 6) ou pelos valores de uma das funções objectivo.

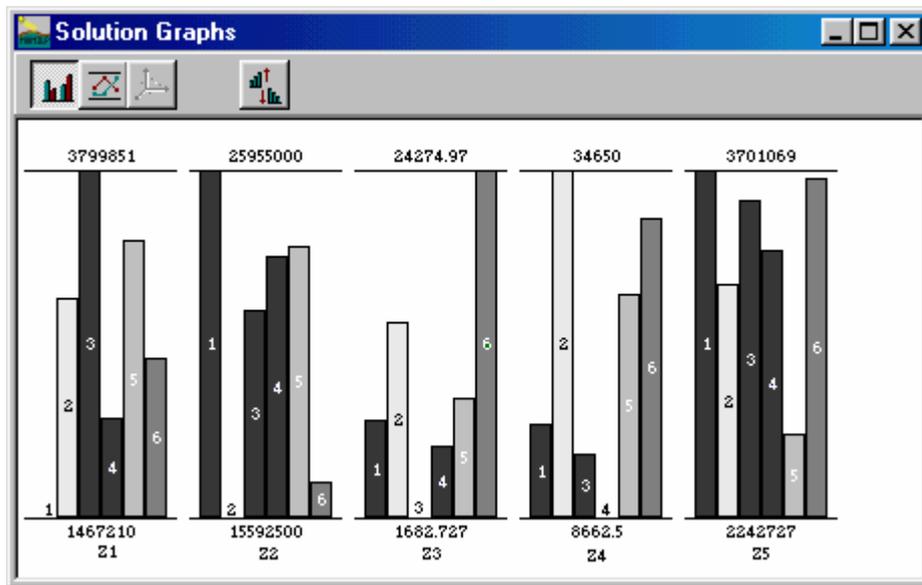
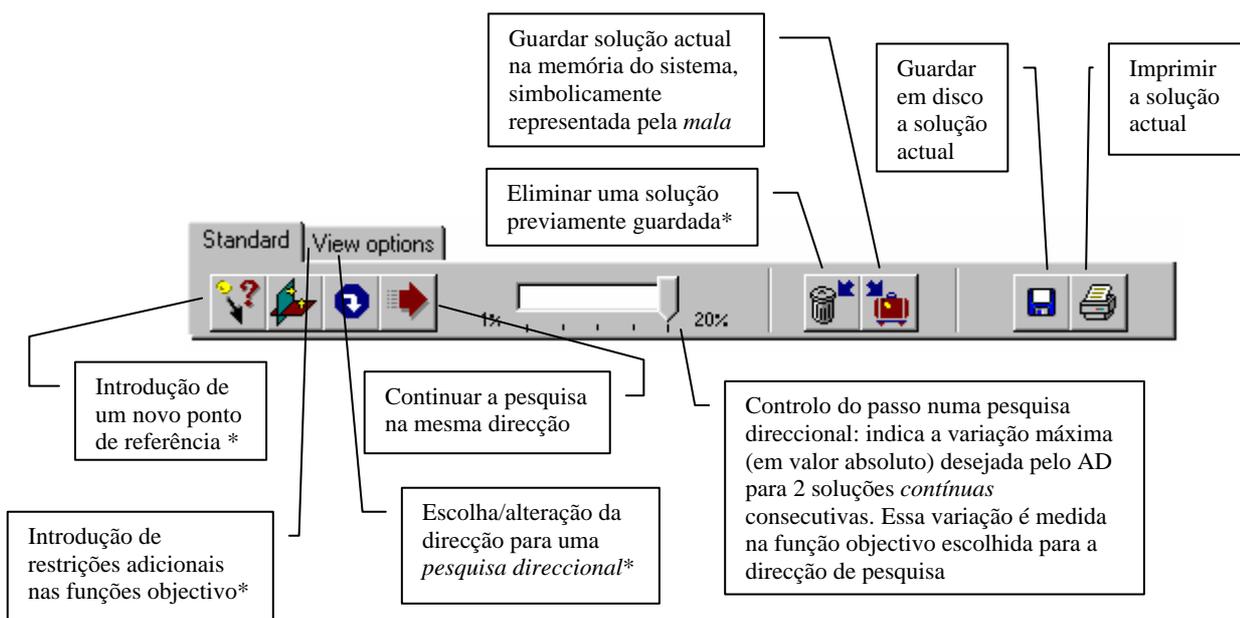


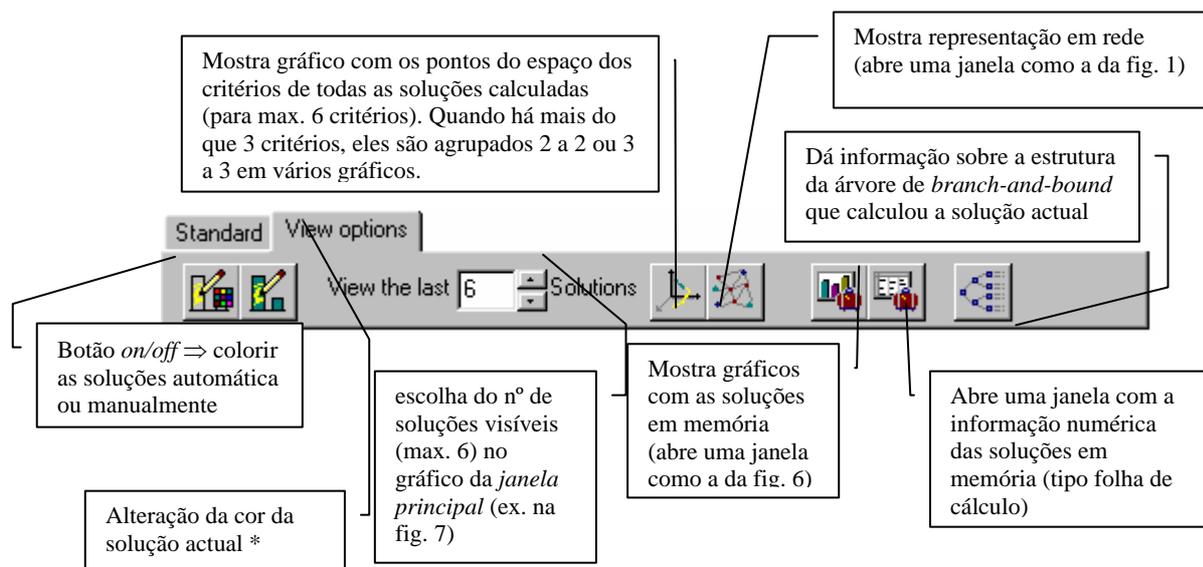
Fig. 6 – Gráficos de barras para as primeiras 6 soluções.

Sempre que se calcula uma solução, ela é apresentada ao utilizador na janela principal do sistema (figuras 7, 8 e seguintes). Esta janela inclui gráficos de barras para a(s) última(s) solução(ões) calculada(s), informação numérica e um painel com as principais opções. As opções dependem do tipo de cálculo efectuado (com pontos de referência ou

pesos). Para um melhor entendimento da forma como o AD interage com o sistema na pesquisa que se segue, o diagrama seguinte faz uma breve descrição das opções disponíveis na abordagem baseada em pontos de referência. Estas opções estão divididas em 2 separadores do painel: 'Standard' e 'View Options'.



(*) Estas opções implicam a entrada de parâmetros através de caixas de diálogo



Continuando com o estudo do problema, decidiu-se, então, fazer uma *pesquisa direccional* a partir da última solução calculada (solução 6) escolhendo-se a 3ª função objectivo para melhorar dado que é a mais sacrificada nesta solução. Esta decisão foi operacionalizada através do botão  do painel, que chama uma caixa de diálogo para selecção da função objectivo que o AD pretende melhorar.

Tal como foi descrito na secção 1, quando é escolhida uma pesquisa direccional, o algoritmo actualiza automaticamente o ponto de referência \underline{z}^+ e determina a solução eficiente que minimiza a distância de Tchebycheff ao novo \underline{z}^+ . O ponto de referência é modificado através da diminuição da 3ª componente (porque Z_3 é a minimizar) mantendo todas as outras componentes iguais (que actualmente são as componentes do ponto ideal).

Esta pesquisa direccional começa por determinar soluções em que Z_1 , Z_2 e Z_5 aumentam e Z_3 e Z_4 diminuem. As primeiras soluções (primeiras iterações) são contínuas (as variáveis inteiras têm os mesmos valores): consideram a abertura das mesmas estações (F_2 e F_4) e apresentam valores próximos para as funções objectivo.

O sistema calcula uma nova solução ao longo da mesma direcção sempre que é premido o botão .

A dada altura (6ª iteração/solução), há alteração das estações abertas que passam a ser F_1 , F_2 e F_4 mas as tendências de variação das funções objectivo mantêm-se (ver fig. 7).

Estamos perante a solução $\underline{z} = (2573156, 16698446, 19284, 30430, 3703112)$.

A ferramenta de pesquisa aqui utilizada evidencia que grandes “saltos” ao nível do ponto de referência \underline{z}^+ nem sempre correspondem a variações bruscas nos valores das funções objectivo. Apesar de o AD se poder alhear, se assim o desejar, das variações automáticas de \underline{z}^+ , uma análise técnica deste processo permite também aumentar o conhecimento acerca do problema. O processo de análise de sensibilidade tenta sempre dar “passos curtos” de modo a que haja um varrimento total ao longo da direcção de pesquisa. Mas, por vezes é necessária uma grande variação do ponto de referência para “escapar” da solução anterior, o que não implica, necessariamente, grandes variações nas funções objectivo. Foi o que aconteceu na 1ª iteração desta pesquisa em que a 3ª componente de \underline{z}^+ (isto é, z_3^+) baixou logo de 1682.7 para -1046281 (variação

de $-62 \times 10^3\%$). As variações seguintes de z_3^+ foram de $-9 \times 10^{-5}\%$ a -2.2% por iteração. As variações dos valores das funções objectivo podem ser avaliadas pelos gráficos da fig. 7 (esta é a janela principal do sistema).

Nesta pesquisa calcularam-se 6 soluções em apenas 0.81 seg que representa 70%

do tempo de cálculo da solução de partida. O tempo despendido em cada solução eficiente variou entre 0.06 seg e 0.27 seg. A fig. 7 mostra o tempo relativo à última solução (0.16 seg). Estes tempos incluem os da fase de análise de sensibilidade e os da actualização da árvore de branch-and-bound que determina cada solução.

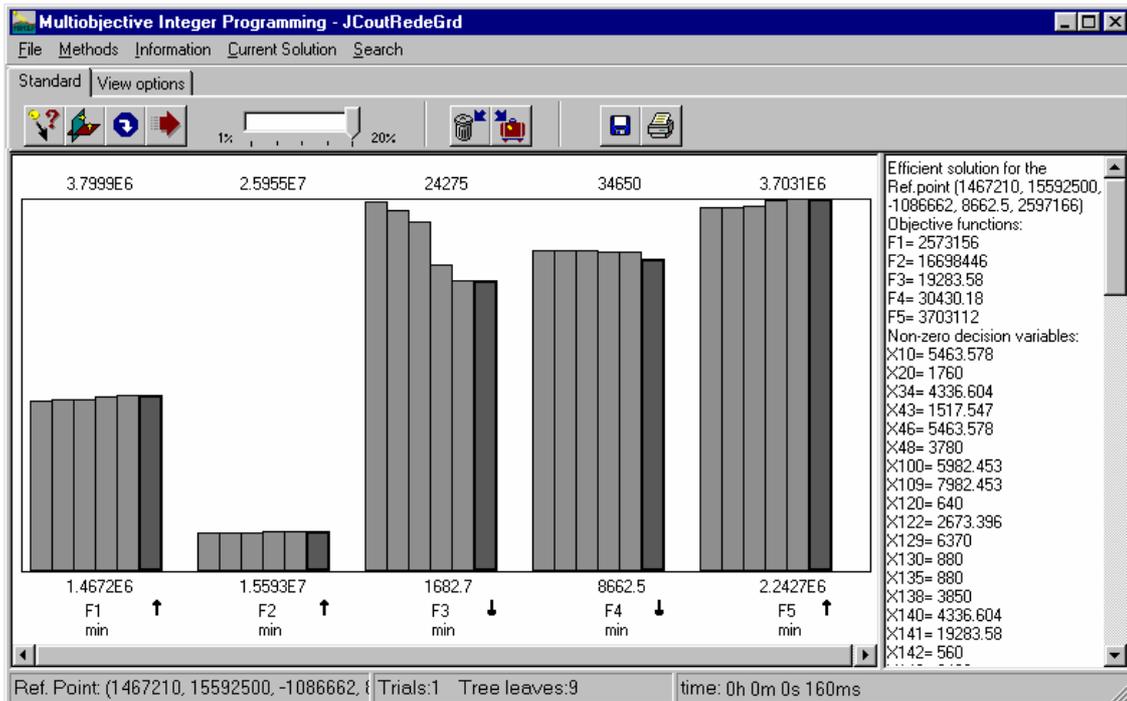


Fig. 7 – Primeira pesquisa direccional (diminuição da 3ª função objectivo).

Como o custo (Z_5) das soluções obtidas é muito elevado, optou-se por alterar a direcção de pesquisa no sentido da diminuição do custo. Como consequência, inverteu-se inicialmente o sentido de variação de Z_3 que começou a aumentar, retomando a situação de abertura das estações F_2 e F_4 . Passadas algumas soluções (6ª iteração nesta direcção), alterou-se a tendência de variação de Z_3 que diminui bruscamente. Simultaneamente, Z_5 diminui também

bastante e Z_4 diminui ligeiramente – apenas Z_1 e Z_2 aumentam ligeiramente (fig. 8). Mantém-se a situação de F_2 e F_4 abertas. Decidiu-se guardar esta solução – solução 7.

Nesta pesquisa direccional, a maior variação do ponto de referência ocorreu na última iteração onde z_5^+ baixou de 2458002 para 2175695 (variação de -11.5%).

	Z_1 (min)	Z_2 (min)	Z_3 (min)	Z_4 (min)	Z_5 (min)
Solução 7	2 661 805	16 787 095	16 837	30 668	3 370 291

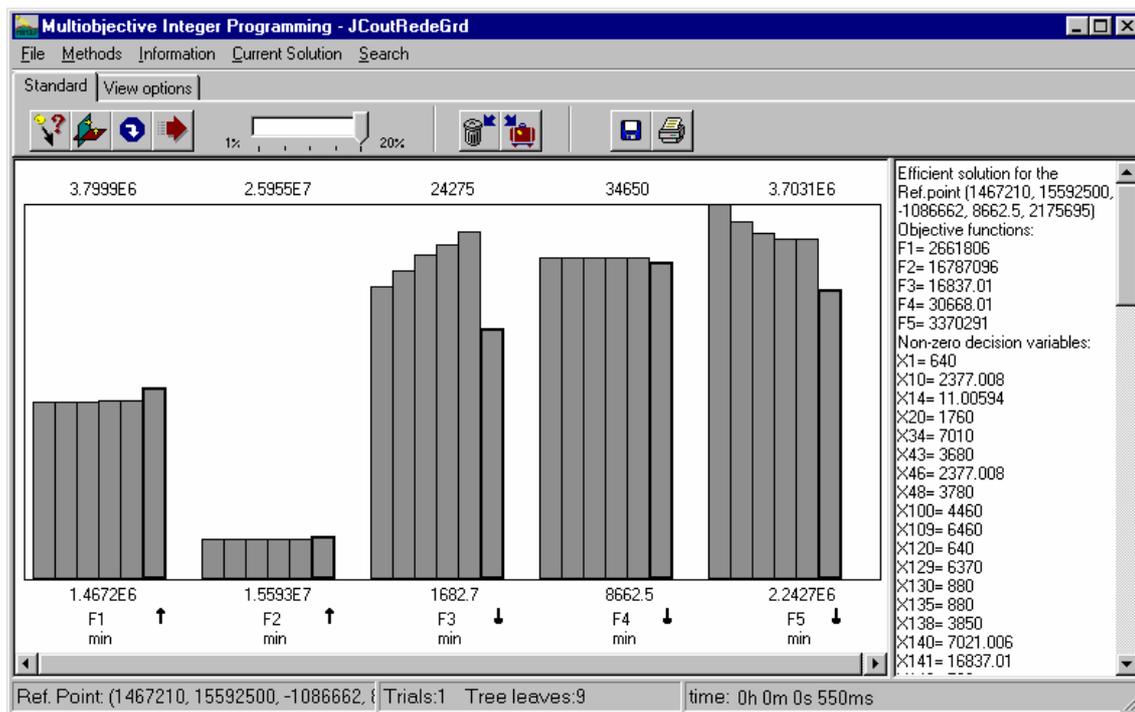


Fig. 8 – Segunda pesquisa direccional (diminuição da 5ª função objectivo).

Continuando a pesquisa segundo a mesma direcção, Z_3 diminui logo para 14460 e Z_5 para 3337144. Mantêm-se as outras tendências de variação e durante algumas iterações verificam-se variações muito ligeiras: Z_1 e Z_2 aumentam, Z_4 e Z_5 diminuem; Z_3 mantém-se inicialmente a 14460 (5 iterações) descendo depois a 13820 onde se mantém durante 5 iterações. Na iteração seguinte, há um “salto abrupto” para uma solução com valores extremos em alguns dos critérios, semelhante à solução 2, onde se considera a abertura de apenas a estação F_4 . A fig. 9 mostra esta solução e as 5 anteriores. Esta solução é provocada por uma variação de apenas -0.5% em z_5^+ relativamente ao da iteração anterior. Z_4 atinge o máximo (conhecido até ao momento) e Z_2 o mínimo. Esta solução só difere da solução 2 nos valores de Z_1 (ligeiramente maior) e Z_5 (ligeiramente menor). Foi abandonada esta direcção de pesquisa.

Uma pesquisa direccional procura soluções não dominadas próximas, em que o “passo” máximo para as soluções

contínuas é controlado pelo utilizador. No caso de um problema inteiro-misto, como é o caso, há troços de soluções contínuas, com valores próximos entre si, e há também descontinuidades quando se altera a parte inteira das soluções. As pesquisas direccionais efectuadas (a 1ª no sentido da diminuição da maior exposição individual durante o transporte, Z_3 , e a 2ª no sentido da diminuição do custo, Z_5) mostram alguns aspectos interessantes da geometria do problema: a existência de descontinuidades com muito pouco impacto nos valores das funções objectivo – fig. 7 – e a existência de outras descontinuidades com variações abruptas nos valores das funções objectivo – fig. 9. Para passar de um troço ao outro, basta por vezes um “toque” muito ligeiro no ponto de referência. Mas, outras vezes é necessária uma grande variação do ponto de referência. Este processo de alteração é automático. Assim, as pesquisas direccionais dão-nos uma percepção da geometria do problema que dificilmente seria obtida utilizando outro tipo de ferramenta de pesquisa.

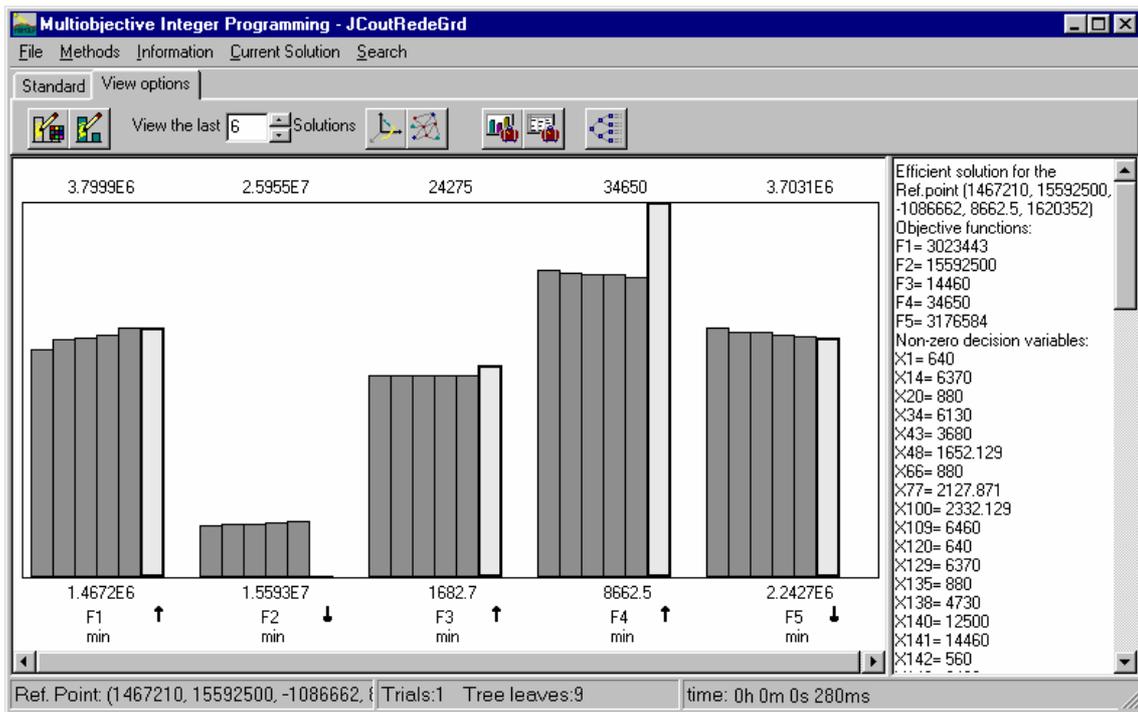


Fig. 9 – Continuação da pesquisa direccional anterior (diminuição da 5ª função objectivo).

Tendo em atenção os valores da solução 7 (última solução guardada) e as tendências de variação verificadas na pesquisa anterior, foi estipulado o seguinte ponto de referência: $\underline{z}^+ = (2 \times 10^6,$

$20 \times 10^6, 10000, 15000, 3 \times 10^6)$. A solução obtida – solução 8 – é relativamente equilibrada. Comparando-a com a solução imediatamente anterior, é melhor em todas as funções objectivo excepto Z_2 (fig. 10) Considera a abertura das estações F_2 e F_4 .

	Z_1 (min)	Z_2 (min)	Z_3 (min)	Z_4 (min)	Z_5 (min)
Solução 8	2 028 630	20 028 630	13 053	19 863	3 028 630

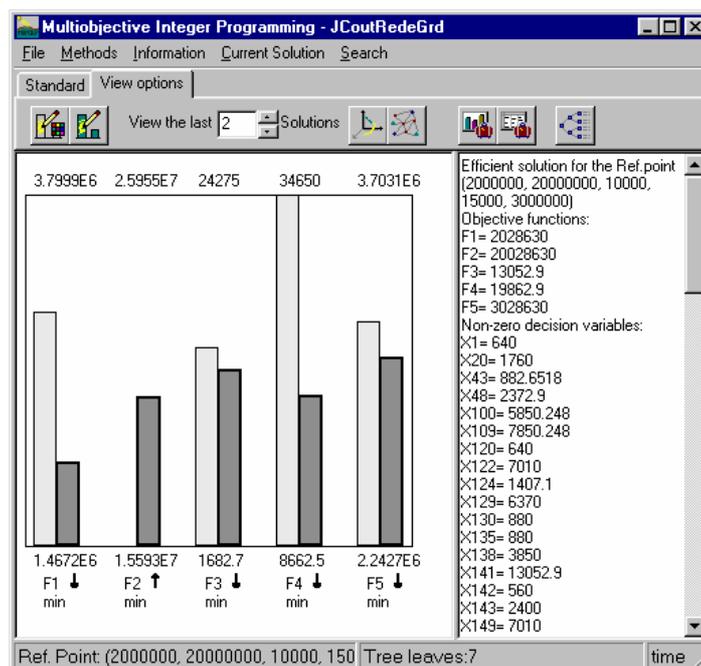


Fig. 10 – Solução 8 (mais escura) e a solução anterior.

Partindo desta solução, procedeu-se a uma nova pesquisa direccional no sentido de tentar melhorar um pouco Z_2 . As soluções obtidas sacrificam todas as outras funções objectivo para melhorar Z_2 . Com $Z_2=18944650$ (4ª solução desta pesquisa), resolveu-se impor a limitação adicional $Z_2 \leq 19 \times 10^6$ (através da opção ) e escolher novamente Z_3 para

melhorar. Z_2 atinge exactamente os 19×10^6 , Z_3 diminui e Z_1 e Z_5 aumentam (Z_4 tem também um ligeiro aumento). Passadas algumas soluções com variações muito pequenas, é encontrada uma outra solução que considera a abertura das estações F_1 , F_2 e F_4 e que diminui o valor de Z_4 – solução 9.

	Z_1 (min)	Z_2 (min)	Z_3 (min)	Z_4 (min)	Z_5 (min)
Solução 9	2 253 931	19 000 000	12 321	21 509	3 253 931

Continuando a pesquisa na mesma direcção, verifica-se que Z_2 se mantém, Z_1 e Z_5 aumentam e Z_3 e Z_4 diminuem. Em virtude do custo total estar a tornar-se bastante elevado, resolveu-se escolher Z_5 para melhorar adicionando-se a limitação

$Z_3 \leq 9000$ para obrigar Z_3 a diminuir também. O ponto de referência actual é $(2 \times 10^6, 18761566, -334898.3, 15000, 3 \times 10^6)$. A solução eficiente mais próxima deste ponto de referência que satisfaz as duas limitações adicionais é a solução 10.

	Z_1 (min)	Z_2 (min)	Z_3 (min)	Z_4 (min)	Z_5 (min)
Solução 10	2 346 793	19 000 000	9 000	21 892	3 346 793

Prosseguindo no sentido de melhorar Z_5 , obtêm-se inicialmente soluções em que Z_2 e Z_3 mantêm os valores das limitações, Z_4 mantém-se a 20225, Z_1 aumenta e Z_5 diminui. Passadas algumas soluções (7 iterações), há um aumento significativo em Z_4 para 23291 sem grandes contrapartidas nas outras funções objectivo. A estação F_1 já não está aberta, mas apenas F_2 e F_4 . É uma solução que

nos pareceu desinteressante (penúltima solução na fig. 11).

Decidiu-se, então, impor mais uma limitação adicional, desta vez em Z_4 : $Z_4 \leq 20000$. A solução eficiente mais próxima do ponto de referência actual, $(2 \times 10^6, 18761566, -334898.3, 15000, 2767193)$, que satisfaz as três limitações adicionais é a solução 11 (fig.11).

	Z_1 (min)	Z_2 (min)	Z_3 (min)	Z_4 (min)	Z_5 (min)
Solução 11	2 415 817	19 000 000	9 000	20 000	3 183 010

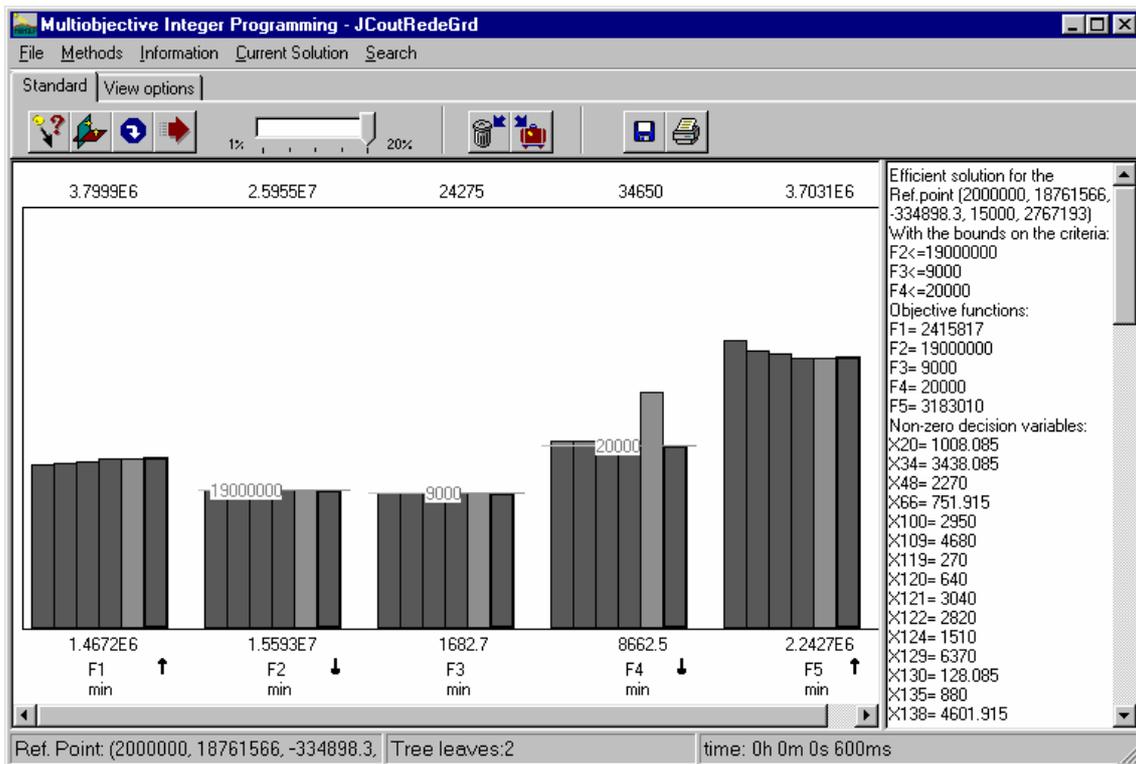


Fig. 11 – Solução 11 (barra à direita, em cada coluna) e pesquisa que antecedeu o cálculo desta solução.

Esta solução parece-nos apresentar um compromisso satisfatório entre os vários critérios.

A solução 11 tem as seguintes características. São abertas as estações de tratamento F_1 , F_2 e F_4 que processam, respectivamente, 3950, 10700 e 20000 unidades. A quantidade máxima processada é, assim, de 20000, indicador do maior risco individual em estações de tratamento (Z_4). A maior exposição ao resíduo durante o transporte (Z_3) é 9000 dada pela ligação W_2-F_4 . O local da estação F_3 funciona como ponto de passagem de 1008 unidades. A rede

correspondente a esta solução está representada na fig. 12. Observa-se, nesta rede, que é utilizado o percurso $T_{11}-F_3-W_{11}$ quando existe uma ligação directa $T_{11}-W_{11}$. É uma situação contra-intuitiva que, tal como outras já observadas anteriormente (por exemplo nas soluções 1 e 4), relaciona-se com o compromisso *risco total do transporte* (Z_1)/*custo total* (Z_5). O custo de transporte em $T_{11}-F_3-W_{11}$ é 50.56 (=25.06+25.5) por unidade de resíduo enquanto que em $T_{11}-W_{11}$ é 7.62. Por outro lado, a população de $T_{11}-F_3-W_{11}$ sujeita a risco totaliza 14 enquanto que em $T_{11}-W_{11}$ é 90.

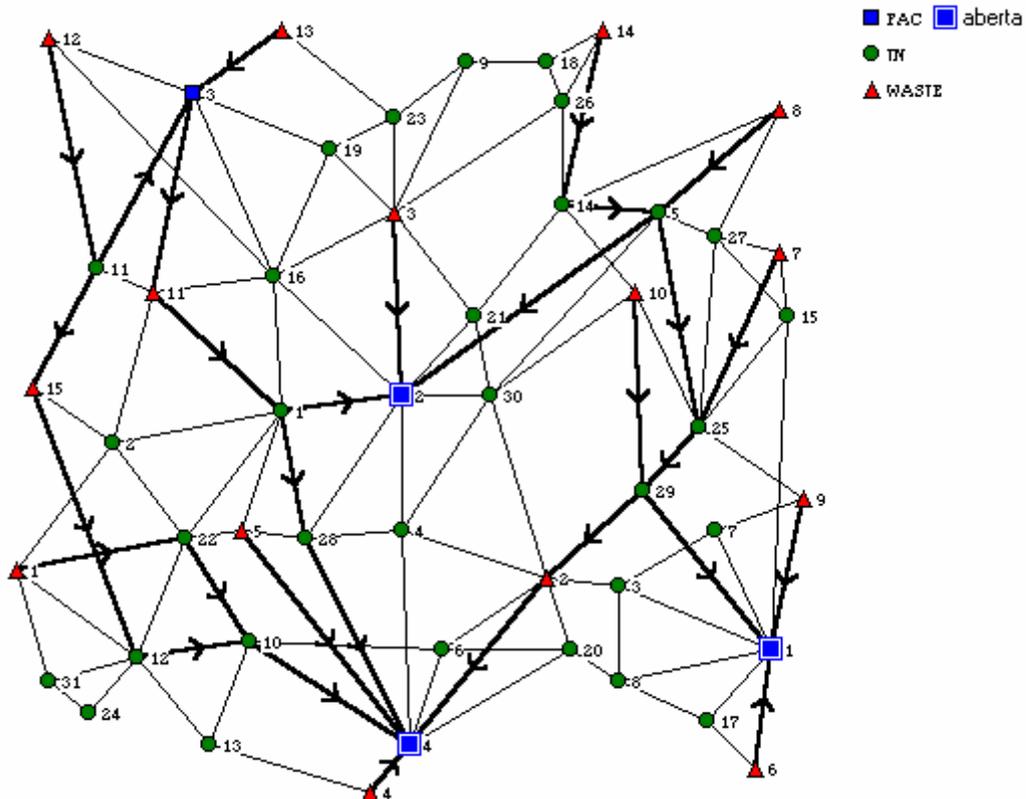


Fig. 12 – Rede da solução 11.

As fig. 13 e 14 resumem o estudo efectuado para este problema mostrando gráficos de barras e os valores das 11

soluções eficientes analisadas e guardadas.

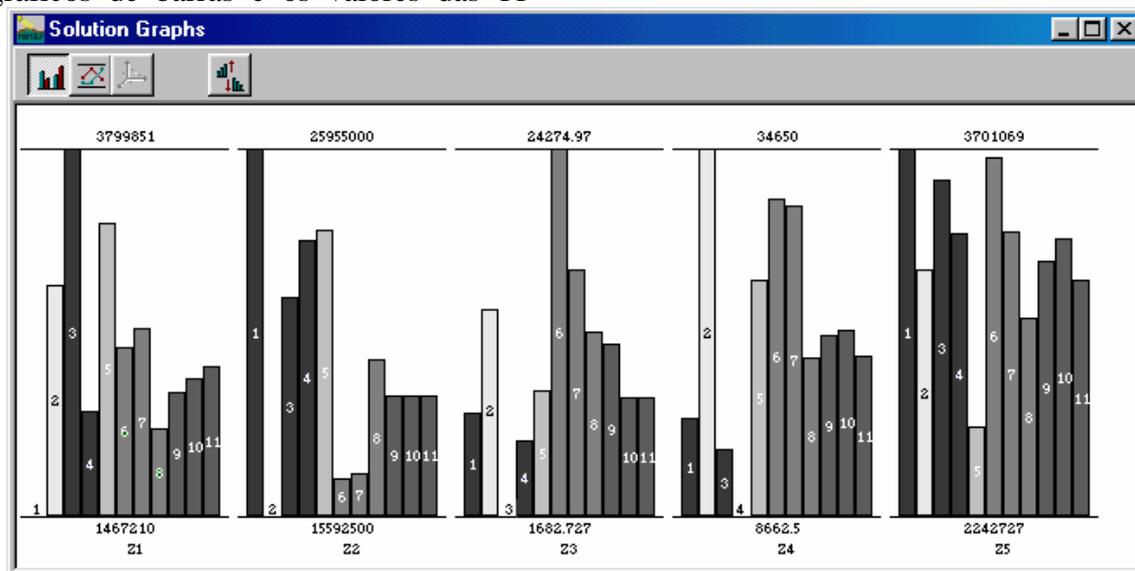


Fig. 13 – Gráficos de barras das 11 soluções eficientes guardadas.

	Estações abertas	Z ₁ (min)	Z ₂ (min)	Z ₃ (min)	Z ₄ (min)	Z ₅ (min)
Solução 1	1, 2, 3, 4	1 467 210	25 955 000	8 040	15 630	3 701 069
Solução 2	4	2 939 590	15 592 500	14 460	34 650	3 223 059
Solução 3	1, 2, 3, 4	3 799 851	21 770 318	1 682.7	13 462	3 579 522
Solução 4	1, 2, 3, 4	2 137 958	23 388 750	6 370	8 662.5	3 367 100
Solução 5	1, 2	3 324 450	23 677 500	9 410	25 410	2 597 166
Solução 6	2, 4	2 536 719	16 662 009	24 275	31 085	3 666 675
Solução 7	2, 4	2 661 805	16 787 095	16 837	30 668	3 370 291
Solução 8	2, 4	2 028 630	20 028 630	13 053	19 863	3 028 630
Solução 9	1, 2, 4	2 253 931	19 000 000	12 321	21 509	3 253 931
Solução 10	1, 2, 4	2 346 793	19 000 000	9 000	21 892	3 346 793
Solução 11	1, 2, 4	2 415 817	19 000 000	9 000	20 000	3 183 010

Fig. 14 – Tabela de valores das 11 soluções eficientes analisadas.

Fixando as funções objetivo de equidade de risco (Z₃ e Z₄) em 9000 e 20000, respectivamente, fizemos ainda uma pesquisa local na vizinhança da solução 11 considerando apenas os critérios Z₁, Z₂ e Z₅. A fig. 15 mostra os pontos no espaço dos critérios referentes às soluções pesquisadas: a solução de partida (solução 11) está representada por A; primeiro analisaram-se soluções que melhorassem Z₅ – até à solução B≡(2882798, 19466981, 2989890) –

e, em seguida, soluções que melhorassem Z₁ – até à solução C≡(2274689, 19606441, 3129351). Note-se que o gráfico da fig. 15 utiliza escalas iguais às dos gráficos anteriores o que, apesar de dificultar a visualização, permite situar melhor no espaço esta pesquisa local. A fig. 16 esclarece a evolução dos valores nos 3 critérios através de gráficos de barras. Todas estas soluções consideram a abertura das mesmas estações de tratamento de resíduo, F₁, F₂ e F₄.

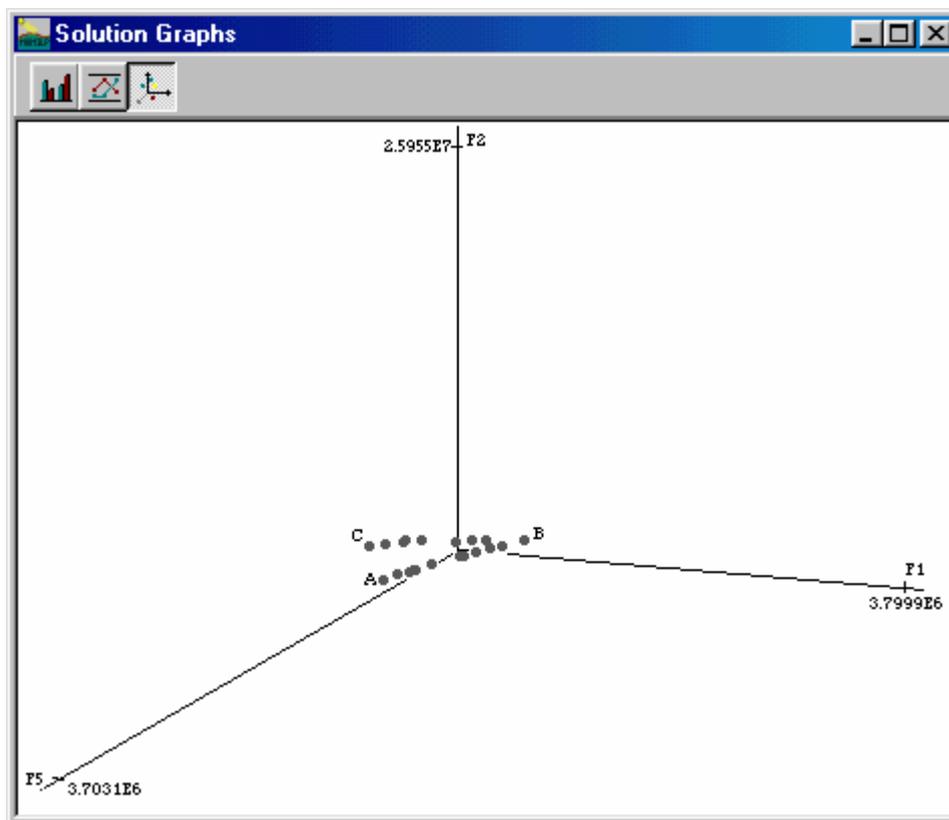


Fig. 15 – Espaço dos critérios numa pesquisa local com Z₃ e Z₄ fixas.

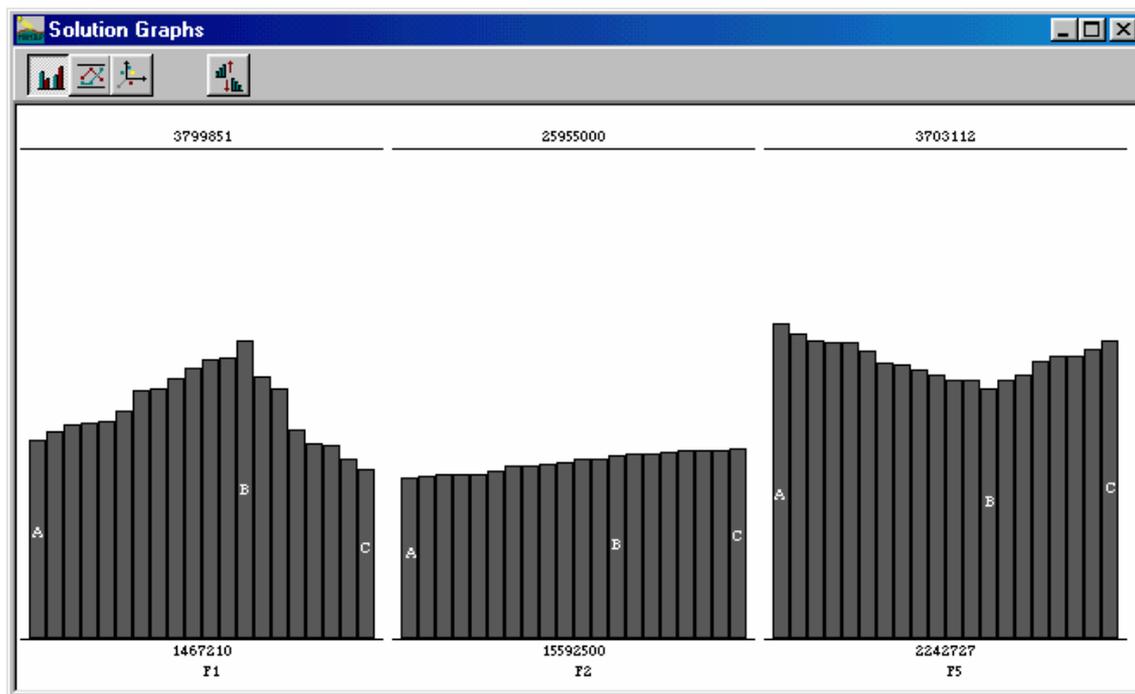


Fig. 16 – Gráficos de barras duma pesquisa local com Z_3 e Z_4 fixos.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho descrevemos a aplicação de uma abordagem interactiva baseada em pontos de referência a um problema multiobjectivo de localização-transporte. Foram apresentados alguns resultados (parciais) ilustrativos do estudo efectuado para o problema. Deste estudo, ressaltaram as seguintes características do problema:

- As funções objectivo Z_2 , Z_3 e Z_4 , admitem várias soluções óptimas alternativas (eficientes e também fracamente eficientes) quando optimizadas individualmente. Assim, as soluções 2, 3 e 4 não são as únicas soluções eficientes em que se atinge o valor mínimo para a respectiva função objectivo.
- O valor máximo (pior) da tabela de “pay-off” para a função objectivo Z_3 está muito aquém do máximo eficiente para este critério (veja-se, por ex., a solução 6), pelo que a percepção inicial da gama de valores eficientes dada pela tabela de “pay-

off” é grosseira, pelo menos para este critério.

- As pesquisas direccionais evidenciam que há soluções eficientes com variações muito pequenas em 4 das 5 funções objectivo e uma variação significativa na restante (positiva ou negativa) – compare-se, por ex., a solução 11 com a anterior a esta. Apesar de estas soluções serem todas não dominadas, haverá certamente alguma(s) que é (são) claramente preferida(s) pelo AD em detrimento das outras.

- Na nossa opinião, na formulação do problema apresentada na secção 2 poderia incluir-se o grupo de restrições $\sum_i X_{ji} \leq M, \forall j \in F$. Isto

deve-se ao facto de os nós de estações de tratamento poderem também funcionar como nós de passagem e $\sum_i X_{ji}$ representa todo o resíduo que passa no nó $j \in F$ sem que seja lá processado. As soluções eficientes apresentadas na secção anterior não seriam afectadas por estas restrições porque o maior valor de resíduo transportado (M) atravessa outros nós

ou arcos. Contudo, existem outras soluções eficientes do problema obtidas durante o estudo onde estas restrições têm influência. A título de exemplo, o problema admite uma solução eficiente onde $M = 9817$ mas no nó relativo à estação 2 (fechada) passam 10860 unidades que não são contabilizadas para M .

A abordagem interactiva usada neste trabalho assenta essencialmente numa forma de pesquisa direccional considerando, em geral, restrições adicionais nos valores das funções objectivo. A principal vantagem desta abordagem reside na rapidez de cálculo durante as pesquisas direccionais, o que se explica pelo facto de se aproveitar a informação do cálculo de uma solução para calcular a seguinte. Qualquer outro processo implica a resolução independente de um problema escalarizante de cada vez que se pretende determinar uma nova solução. Há ainda a salientar o facto da actualização do ponto de referência ser automática o que permite que o AD se possa demitir desta tarefa, com a garantia que a solução encontrada será sempre diferente da anterior e melhor para um critério seleccionado.

Esta abordagem é substancialmente diferente da outra abordagem interactiva já experimentada por outros autores para o mesmo tipo de problema [3, 4]. Esta diferenciação torna difícil qualquer comparação de tácticas ou resultados. Julgamos, porém, que as duas abordagens podem ser consideradas complementares.

5. REFERÊNCIAS

- [1] Alves, M. João e João Clímaco. An Interactive Reference Point Approach for Multiobjective Mixed-integer Programming using Branch-and-bound. *European Journal of Operational Research*, vol. 124, nº 3, 478-494, 2000.
- [2] Alves, M. João e João Clímaco. A note on a decision support system for ENGEVISTA, v. 7, n. 1, p. 32-54, abril 2005
- [3] Coutinho-Rodrigues, J., J. Current, J. Clímaco e S. Ratick. "An interactive spatial decision support system for multiobjective HAZMAT location-routing problems". (a) *Transportation Research Board*, Record 1602, 101-109, 1997. (b) Uma versão prévia foi publicada em WPS 95-39, Max M. Fisher College of Business, The Ohio State University, 1995.
- [4] Coutinho-Rodrigues, J., J. Clímaco, J. Current e S. Ratick. "A guided tour to an interactive location-routing software package using an HAZMAT case", Working Paper, 1997.
- [5] Current, J. E S. Ratick. "A model to assess risk, equity and efficiency in facility location and transportation of hazardous materials". *Location Science*, vol. 3, nº 3, 187-201, 1995.