Caderno Dá Licença
Universidade Federal Fluminense

Explorando a Matemática de Singapura: Metodologia CPA e Suas Aplicações Práticas

Ana Maria Luz[1]
analuz@id.uff.br

Resumo

A Matemática de Singapura, reconhecida mundialmente por seus excelentes resultados no PISA, baseia-se na metodologia CPA (*Concreto, Pictórico Abstrato*), que promove a compreensão profunda de conceitos matemáticos. Essa abordagem inicia com representações concretas usando materiais manipuláveis, evolui para representações pictóricas (desenhos ou esquemas) e culmina na abstração, com o uso de símbolos matemáticos. Vamos inicialmente descrever os fundamentos desta abordagem, que tem sido usada nas oficinas do Projeto de Extensão Matema.Ativa: Matemática Ativa e Criativa e apresentaremos uma proposta de sequência didática explorando ferramentas associadas à esta metodologia para o ensino de frações.

Introdução

A Matemática de Singapura é famosa por possibilitar que os estudantes participem ativamente nas aulas de matemática e por permitir que eles possam vivenciar a matemática de maneira concreta, além de utilizar representações visuais. Esta Metodologia foi criada no final do século XX em Singapura, oficialmente conhecida como República de Singapura, uma cidade-estado insular situada na extremidade sul da Península Malaia, no Sudeste Asiático, a 137 quilômetros ao norte do Equador. A abordagem pedagógica utilizada em Singapura, baseada em pensadores ocidentais, tem atraído a atenção de vários países devido ao excelente desempenho que Singapura alcançou no PISA (Programa de Avaliação Internacional de Estudantes), obtendo o segundo lugar em Matemática em 2009 e 2012, e o primeiro lugar em 2015, 2018 e 2022.

[1] Doutora em ciências. IMPA. ORCID 0000-0002-2279-9605.

Segundo Teixeira (2016), ao consultarmos o programa oficial de Matemática de Singapura, vemos um esquema pentagonal para descrever os principais aspectos do currículo de ensino de matemática (Figura 1).

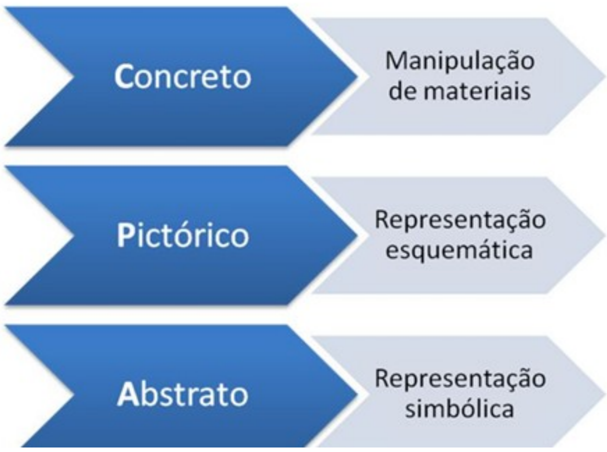
Figura 1 – Modelo Pentagonal do Currículo do Ensino de Matemática em Singapura

Fonte: Teixeira (2016).

Como destaca Teixeira (2015), existem três teorias edificadoras do currículo de Singapura:

1) A abordagem Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA) – Figura 2, que remonta aos trabalhos do psicólogo americano Jerome Bruner.

Figura 2 – Modelo CPA



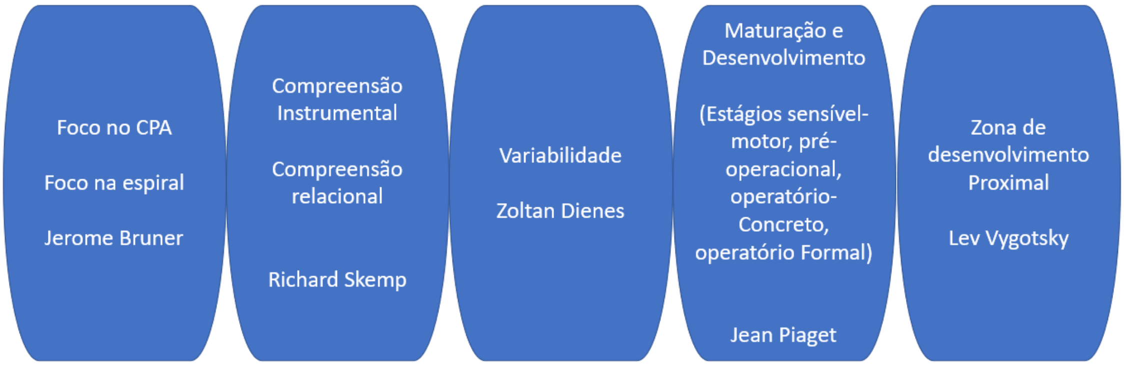
Fonte: Adaptado pela autora de Fernandes (2017).

2) Os princípios de variabilidade matemática e perceptiva, do educador matemático húngaro Zoltan Dienes (o criador dos blocos lógicos), os quais apontam para a necessidade de se usar diversos exemplos e contextos na aprendizagem de um conceito, assim como múltiplas representações;

3) O trabalho de Richard Skemp, psicólogo inglês, sobre a importância de se estabelecer conexões, de se compreender as relações matemáticas e a sua estrutura, de modo a alcançar um conhecimento profundo e duradouro dos conteúdos (tudo deve estar relacionado).

Além destas destacamos ainda as teorias de aprendizagem de Jean Piaget e Lev Vygotsky. Na Figura 3 abaixo temos um diagrama com principais teorias quem baseiam o ensino de matemática em Singapura.

Figura 3 – Teorias de Aprendizagem Bases da Matemática de Singapura



Fonte: a autora

Segundo Bruner, Piaget e Vygotsky (*apud* Fernandes, 2017) é inviável adquirir conhecimento matemático sem manipular materiais e debater socialmente nossas concepções. Em contrapartida, Zoltan Dienes (*apud* Fernandes, 2017) argumenta que é crucial escolher cuidadosamente o conteúdo a ser ensinado, empregar intencionalidade pedagógica na seleção cuidadosa das tarefas e focar em uma prática que tenha significado para a criança. Nessas condições, é fundamental que o educador saiba escolher o tema e não ensine apenas o que as crianças desejam aprender.

Conforme podemos encontrar em Perrout (2022), Piaget (Videira, 2012 *apud* Simões, 2015, p. 30) propõe que, inicialmente, dos 7 aos 12 anos, durante o estágio operatório concreto, o uso de materiais concretos é essencial para o aprendizado da matemática. Da mesma forma, Bruner e

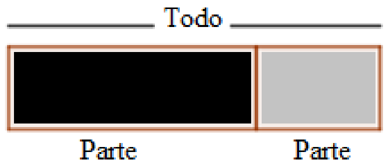
Vygotsky (Fernandes, 2017) concordam que o uso desses é essencial para o aprendizado do conteúdo. No entanto, ainda segundo Perrout (2022), para Piaget, após os 12 anos, no estágio operatório formal, espera-se que isso não seja mais necessário. Portanto, a frequência de materiais concretos no aprendizado pode diminuir com o passar do tempo.

São essas características que exploramos na sequência didática que apresentaremos aqui. Ela se inspira em algumas atividades que foram realizadas sobre a temática de Frações nas oficinas de matemática realizadas no Projeto Jurujuba, pelo Projeto de Extensão Matema.Ativa: Matemática Ativa e Criativa. Para que seja mais compreensível a proposta da sequência didática, introduziremos a seguir o modelo de barras.

O Modelo de Barras

O Método de Singapura apresenta também uma forte componente visual, como já mencionamos pois o modelo CPA (concreto – pictórico - abstrato) é um dos fundamentos do método. Um exemplo paradigmático é o **modelo de barras**, amplamente usado pelos alunos do Ensino Primário de Singapura. Foi introduzido em 1983 por uma equipe de investigadores liderada por Kho Tek Hong. O objetivo foi o de melhorar capacidade de resolução de problemas dos alunos ao fornecer uma representação pictórica que ajuda na visualização das diferentes relações matemáticas e que leva os alunos a habituarem-se a estabelecer um plano durante o processo de resolução. Conforme Oliveira (2020), o Modelo de Barras contribui significativamente para a compreensão das quatro operações, uma vez que pode ser aplicado em diversas situações. Este Modelo pode ser classificado em duas categorias: parte e todo e de comparação. O primeiro se refere a conhecer uma das partes ao conhecer a outra ou o todo ao conhecer as partes (Figura 4). O segundo aborda duas quantidades e as comparações que podem ser realizadas entre elas, tais como, a diferença entre elas, a quantidade de uma em relação à outra, ou ainda, a quantidade de uma em relação à outra. Ainda, é possível representar razões e proporções, porcentagens, quantidades desconhecidas por letras por meio desse Modelo.

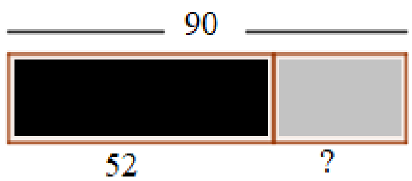
Figura 4 –Modelo de barras: *Um todo dividido em duas partes*



Fonte: a autora

No conceito de "Parte-todo" têm uma relação entre as três quantidades representadas: o todo e duas partes. Este modelo também pode ser usado para encontrar uma das partes quando se conhece a outra e o todo (Figura 5).

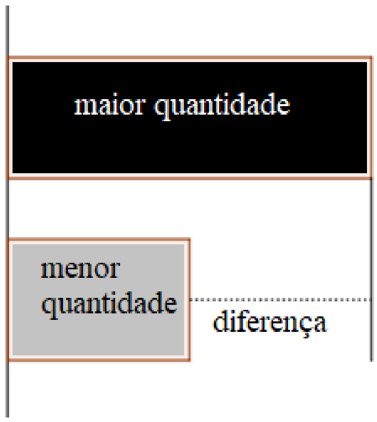
Figura 5 – Modelo de barras: *descobrir uma das partes*



Fonte: a autora

No caso do modelo de barras para comparação (Figura 6) temos a representação de duas quantidades e as comparações que são possíveis fazer entre elas, como, qual é a diferença entre elas, o quanto tem uma a mais que a outra ou ainda, o quanto uma tem a menos que a outra

Figura 6 – Modelo de Barras para comparação

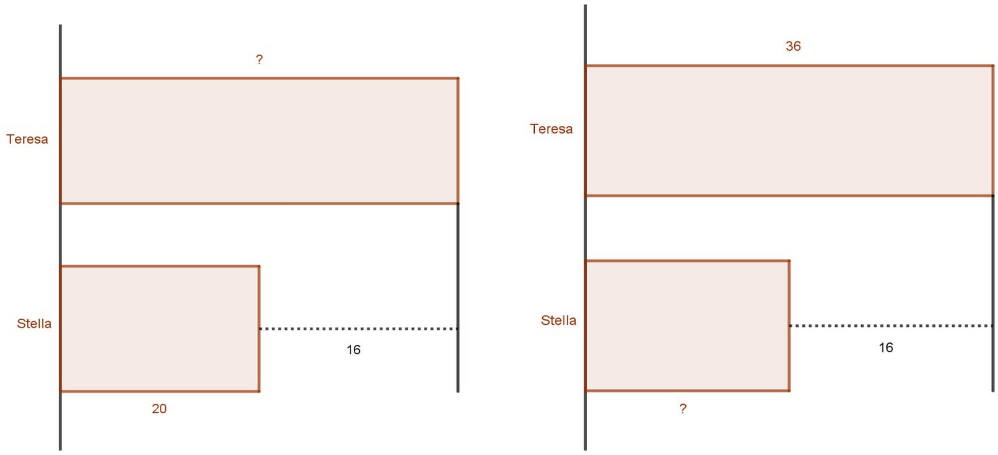


Fonte: a autora

Existe uma relação entre as três quantidades representadas: a *maior quantidade*, a *menor quantidade* e a *diferença*.

Observe as Figuras 7 e 8 abaixo e os exemplos

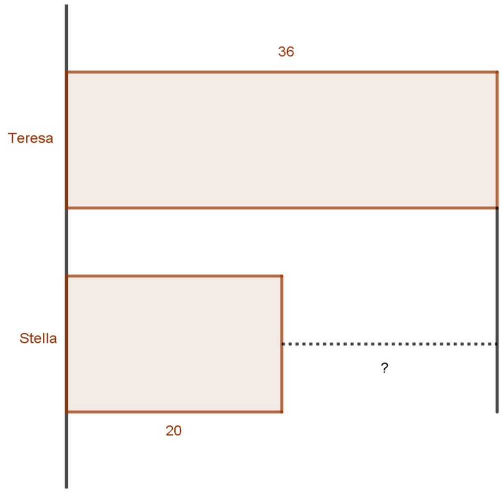
Figura 7 – Modelo de Barras: A diferença das quantidades é conhecida



Fonte: Perrout, 2022.

No primeiro caso da Figura 7, perguntas como se: “Stella tem 16 reais a menos que Teresa, quanto Teresa tem?” Ou ainda para o mesmo caso, se “Teresa tem 16 reais a mais que Stella, quando Teresa tem?”. Na segunda imagem, perguntas similares podem ser propostas, agora buscando quanto Stella tem.

Figura 8 – Modelo de Barras: Comparar duas quantidades



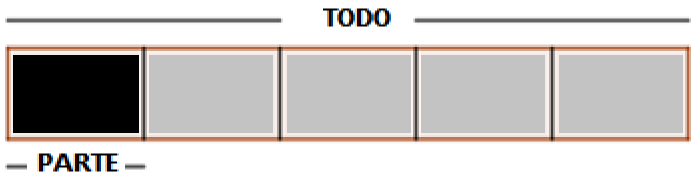
Fonte: Perrout, 2022.

Na Figura 8, não se sabe o quanto se tem a mais ou a menos, logo, faz-se essa comparação entre as quantidades para sabê-lo.

É possível ainda trabalhar os conceitos de multiplicação e a divisão com ambos os tipos de modelos de barra (“parte-todo” e comparação).

Os conceitos de multiplicação e divisão estão relacionados à *um todo dividido em várias partes iguais.* Por exemplo, o modelo seguinte apresenta um todo dividido em cinco partes iguais:

Figura 9 – Descobrir a parte



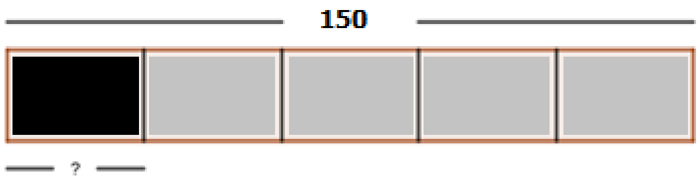
Fonte: a autora

Existe uma relação de quantidade entre o todo, o valor de uma parte e o número total de partes.

Considere o seguinte problema: "*José tem 150 reais para dividir com seus cinco netos. Considerando que todos vão receber a mesma quantia, quanto cada um irá receber?*"

Podemos representar tal situação da seguinte forma (Figura 10):

Figura 10 – Descobrir a parte



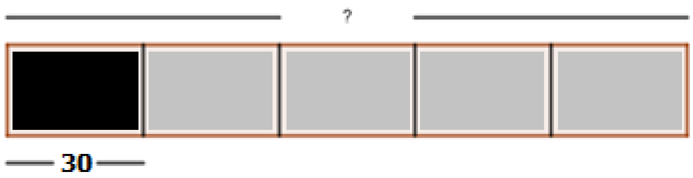
Fonte: a autora

Conhecemos o número de partes (5), o todo (150), mas o valor de cada parte é desconhecido. Desse modo, precisamos apenas dividir 150, o todo, por 5, a quantidade de netos.

150 : 5 = 30. Cada neto vai receber *30* reais.

No mesmo contexto, mas considerando que temos a quantidade de netos de José, 5, e sabemos quanto cada um deve receber, 30, podemos construir o modelo da seguinte forma (Figura 11).

Figura 11 – Descobrir o todo



Fonte: a autora

A pergunta associada seria: *“Quanto dinheiro José precisa ter para dar 30 reais para cada um dos seus 5 netos?”*

Assim, para obter o TODO multiplicar o 30 (uma parte) por 5 (total de partes)

30 x 5 = 150. José precisa ter *150* reais.

Ao empregar o Modelo de Barras, é possível proporcionar uma visualização mais clara do problema. Este método utilizado em Singapura, capacita os alunos a visualizarem a situação do problema por meio de modelos que tornam explícito o contexto do problema e a operação necessária para sua resolução. Uma vantagem adicional, é que esse modelo é especialmente útil para auxiliar alunos que possam enfrentar dificuldades com conceitos abstratos por meio de representações visuais.

Preparamos a sequência a seguir tendo em mente participantes a partir do sexto ano, mas por sua dinâmica e utilizando materiais concretos e representações pictóricas, consideramos que pode ser utilizada também em séries anteriores.

Sequência Didática: Divisão de Frações com Material Concreto e Representação Pictórica (Modelo de Barras)

Ano: 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental

Objetivo: Ensinar o conceito de divisão de frações usando material concreto e o modelo de barras para facilitar a compreensão e a transição para o raciocínio abstrato.

Habilidades da BNCC envolvidas:

- EF06MA07: Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
- EF06MA08: Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
- EF06MA09: Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
- EF06MA10: Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Etapa 1: Introdução conceitual e exploração com material concreto

Objetivo: Apresentar a ideia de divisão como "quantas vezes uma fração cabe dentro de outra". Visualizar a divisão de frações usando materiais manipuláveis.

Atividade:

1. Relembre com os alunos a noção de frações e representações concretas de frações (pode ser usado um material pedagógico como o da Figura 12).

Figura 12 – Material Pedagógico Frações em Barra

Fonte: Site Amazon

Obs.: Outro material que pode ser utilizado: régua de Frações em EVA ou de outro material, feita pelos próprios alunos com a ajuda do(a) professor(a). Ver CALVO, BRANCO e DYSMAN.

2. Contextualize com um problema simples: *"Se você tem 4 barras de chocolate e quer dividi-las em pedaços de 1/2 barra, quantos pedaços ao todo você terá?"*
3. Cada aluno recebe 4 tiras de papel representando barras inteiras.
4. Solicite que dividam cada barra em partes iguais a 1/2.
5. Pergunte quantas partes de tamanho 1/2 estão nas 4 barras. Oriente para contar as divisões feitas.

Resultado esperado: Os alunos identificam que em 4 barras há 8 partes de 1/2, visualizando que 4÷1/2=8.

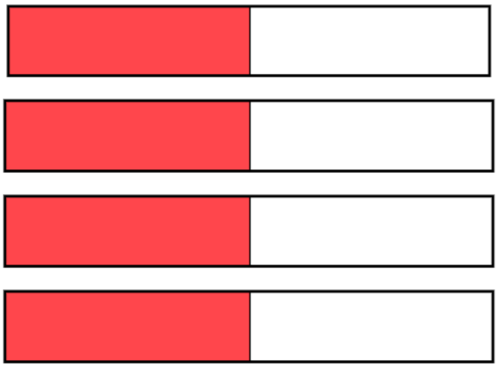
Etapa 2: Transição para Representação Pictórica

Objetivo: Representar a divisão usando o modelo de barras desenhado.

Procedimento:

1. Desenhe 4 barras retangulares no quadro e divida cada uma em seções de 1/2.

Figura 13 – Modelo de barras: 4 barras divididas em seções de 1/2



Fonte: a autora

2. Peça aos alunos para desenharem e fazerem o mesmo em seus cadernos.

Obs.: Neste momento poderiam ser utilizados também alguns sites que apresentam simuladores para régua de frações e/ou para o modelo de barras, como o Didax[2], Toytheater[3] ou Phet.colorado[4].

3. Discuta como o modelo mostra que a divisão de 4 por 1/2 é equivalente a perguntar quantas partes de 1/2 existem dentro de 4 inteiros.

Etapa 3: Generalização e Prática

Objetivo: Estender a ideia para outras divisões de frações.

Atividade:

1. Proponha novos exemplos
2. Oriente os alunos a desenharem barras e utilizarem o modelo de barras para resolver.
3. Estimule os alunos a formularem uma regra geral para a divisão de frações. Pode-se sugerir que os(as) alunos(as) comecem pensando numa regra geral para o caso de n inteiro dividido por 1/k (n÷1/k), os(as) alunos(as) podem ir subdividindo nos casos: n par, n ímpar, e analisar cada situação.

---

[2] **Didax Virtual Manipulatives for Math**. Disponível em: <https://www.didax.com/math/virtual-manipulatives.html>. Acesso em: 9 dez. 2024.

[3] WRITER2, W. P. **Fraction Bars | Teaching Tools | Toy Theater Educational Games**. Disponível em: <https://toytheater.com/fraction-bars/>. Acesso em: 9 dez. 2024.

[4] **Fractions: Intro**. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/sims/html/fractions-intro/latest/fractions-intro_en.html>. Acesso em: 9 dez. 2024.

Etapa 4: Abstração e Discussão

Objetivo: Relacionar o modelo pictórico com a operação matemática formal.

1. Explique como o modelo de barras representa a multiplicação pelo inverso.
2. Resolva $4 \div 1/2 = 4 \times 2 = 8$ usando o cálculo.
3. Discuta a conexão entre o modelo concreto, pictórico e o abstrato.

Avaliação:

Os alunos desenham barras e resolvem problemas envolvendo divisão de frações, justificando suas respostas com base no modelo utilizado.

Destacamos que esta sequência enfatiza a metodologia CPA, ajudando os alunos a desenvolverem uma compreensão significativa e conectada entre representações concretas, pictóricas e abstratas.

Considerações finais: Matemática de Singapura e Aprendizagem Significativa

Na seção anterior apresentamos uma proposta de sequência didática inspirada na matemática de Singapura. Não podemos deixar de destacar que a metodologia de Singapura transforma o ensino ao trazer a resolução de problemas para o centro do aprendizado, conforme Holetz (2019, p. 42), a metodologia de Singapura destaca a importância de integrar a resolução de problemas ao conteúdo apresentado, situando-o em um contexto que evita desconexões com a realidade, conferindo significado ao aprendizado e tornando-o mais relevante para o educando. Essa abordagem está alinhada com a ideia de aprendizagem significativa, descrita por Moreira (2017, apud Holetz, 2019, p. 42) como um processo que proporciona compreensão, sentido e capacidade de transferência, em oposição à aprendizagem mecânica e memorística. Segundo Ausubel (1982, apud Holetz, 2019, p. 42), esse tipo de aprendizado favorece a retenção duradoura e amplia a habilidade de assimilar novos conteúdos de forma mais acessível. Nesse contexto, Holetz (2019, p. 42) enfatiza que a aprendizagem significativa requer um aluno ativo, que constrói e produz seu próprio conhecimento, destacando a importância de metodologias como a de Singapura que promove a autonomia e engajamento no processo educativo.

Referências

AMAZON. Frações Em Barra Click Material Pedagógico Didático Escolar MMP. Disponível em: https://a.co/d/cfWk5bT. Acesso em: 9 dezembro. 2024

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

CALVO, Helena. BRANCO, Liliane e DYSMAN, Anne Michelle Frações: uma introdução com réguas de frações | Seja Bem Vindo, 2020. Disponível em: https://matematicacomvida.uff.br/2020/01/23/fracoes-uma-introducao-com-reguas-de-fracoes/. Acesso em: 8 dezembro. 2024

FERNANDES, Dárida. Sendas de Sucesso com o "método de Singapura" – Parte 1/3. CFAE_Matosinhos_Ed_Ozarfaxinars, Número 70. Maio 2017. Disponível em: https://www.site.cfaematosinhos.eu/Ed_ozarfaxinars_n70.htm. Acesso em: 04 dezembro 2024.

HOLETZ, Melissa Samanta. Utilizando a gamificação e a metodologia de ensino de Singapura para trabalhar com as operações matemáticas básicas nos anos iniciais do ensino fundamental. 2019. Disponível em: https://repositorio.uninter.com/handle/1/491. Acesso em: 4 dezembro 2024.

Matema.Ativa: Matemática Ativa e Criativa. Of Jurujuba 23. Instagram @matema.ativa Disponível em: https://www.instagram.com/s/aGlnaGxpZ2h0OjE3OTgyMjIzMTQ3ODUyMTM0?story_media_id=3066392479502588662_57225129737&igsh=MXhxd21hN2F0cXJqag== Acesso em: 5 dezembro 2024.

PERROUT, Ana Beatriz Carvalho. Matemática de Singapura, Flow e Gamificação para crianças do ensino fundamental. 2022. 84 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2022. Disponível em: https://app.uff.br/riuff/handle/1/28548. Acesso em: 4 dezembro 2024.

TEIXEIRA, Ricardo Emanuel Cunha. Ensino da Matemática : o Método de Singapura. Atlântico Expresso, p. 17–17, 2015. Disponível em: https://repositorio.uac.pt/handle/10400.3/3489. Acesso em: 04 dezembro 2024.

TEIXEIRA, Ricardo Emanuel Cunha. Ensino da Matemática : O Modelo Pentagonal do Currículo de Matemática de Singapura. Atlântico Expresso, p. 17–17, 2016. Disponível em: https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/3888/1/Atl%C3%A2ntico_Expresso_RT46A.pdf. Acesso em: 4 dez. 2024.