USO DE PLANILHA ELETRÔNICA PARA IMPLEMENTAÇÃO DA LÓGICA NEBULOSA EM PROBLEMAS DE FORMULAÇÃO LINEAR MULTIOBJETIVO

Carlos Francisco Simões Gomes[1]
Maria Cecília Chaves[2]

Resumo: Um dos aspectos mais delicados na aplicação da Programação Linear Multiobjetivo (PLMO) está na formulação da função objetivo (FO). FO é a função que deve ser otimizada, respeitando as restrições do problema. Uma escolha adequada pode ser decisiva no sucesso de um modelo de Programação Matemática (PM). Romero (2004) destaca que os resultados obtidos por meio de aplicações da PM e PLMO são fortemente influenciados pelo tipo de função adotada. Neste trabalho é apresentada uma proposta de uma nova abordagem interativa para aplicação em formulação multiobjetivo linear que é uma extensão do método apresentado em (Gomes e Chaves, 2004, 2005 e 2006). Aqui pretende-se por meio da utilização de uma função de pertinência promover uma interpretação da FO que permitirá aumentar o espectro de opções do decisor na análise de sensibilidade. Com isso objetiva-se contornar eventuais distorções que podem advir em problemas onde, por exemplo, os valores assumidos pelas FO's são muito discrepantes, ou em situações onde a soma ponderada dos valores máximos pode privilegiar uma função em relação à outra. Tais situações são possíveis de ocorrer nas formulações clássicas de PLMO.

Palavras-chave: Programação Linear, Formulação Multiobjetivo, Lógica Nebulosa.

Abstract: One of the most delicate aspects in applying Multiple Objective Linear Programming (MOLP) resides on the objective function (OF) formulation. An adequate choice is crucial for the success of a Mathematical Programming (MP) model. Romero (2004) states that the results coming from using PM and MOLP are strongly affected by the function type that is chosen. This document presents a proposal of a new interactive algorithm for linear multiobjective formulation that is an extension of the method introduced in (Gomes and Chaves, 2004, 2005 & 2006). Here we intend through the use of a relevancy function to promote an interpretation of the FO that will allow increasing the specter of options of the decision maker in the sensitivity analysis. With this we focus to skirt eventual distortions that can happen in problems where, for example, the values assumed for the FO's are very discrepant, or in situations where the weighed addition of the maximum values can privilege a function in relation to another one. Such situations are likely to occur in classic formulations of MOLP.

Keywords: Linear Programming, Multiple Objective Programming, Fuzzy Logic.

1 Universidade Federal Fluminense (UFF) e Ibmec-Rj. cgomes@ibmecrj.br
2 PUC-RJ & UFF. mariaceci@hotmail.com

1. INTRODUÇÃO

Dois fatores podem ser destacados como dificuldades ao uso de ferramentas de Pesquisa Operacional (PO):

- A fase de modelagem onde deve-se entender o problema e escolher a ferramenta adequada; e
- A disponibilidade/ familiaridade com a ferramenta computacional que implementa o algoritmo de PO.

A Programação Linear Multiobjetivo (PLMO) permite a formulação de modelos que buscam uma representação mais robusta da realidade ao refletirem a complexidade dos problemas reais caracterizada pela existência de diversos pontos de vista que representam aspectos econômicos, ambientais, administrativos, políticos, etc. Geram, portanto, modelos mais próximos do mundo gerencial, e preenchem a lacuna das formulações monocritério. Mas para tal, é importante a compreensão do modelo e o conhecimento (familiaridade) com a ferramenta de resolução(Ignízio, 1985).

Este trabalho objetiva tornar mais simples a utilização de modelos PLMO e com isso diminuir o "gap" existente entre a teoria e a prática. Este artigo assim propõe uma abordagem interativa para cálculo de soluções não dominadas de PLMO que é implementada em planilhas eletrônicas, facilitando assim o seu amplo uso no meio empresarial e acadêmico.

Este artigo apresenta um processo interativo com implementação em Excel na qual é realizada uma reinterpretação da Função Objetivo (FO) com o objetivo de evitar uma possível distorção que poderia surgir caso um dos objetivos retornasse valores próximos do seu ponto ótimo, considerando as restrições do problema, em relação aos demais objetivos. Este objetivo tende a ser priorizado em detrimento dos demais numa análise paritária. Com este fim são apresentados os resultados de testes comparando o modelo inicialmente proposto por Gomes e Chaves (2005, 2004) e esta extensão sugerida

Inicialmente é feito um breve resumo dos principais conceitos pertinentes a Programação Linear (PL) e PLMO. Posteriormente, na seção **Proposta para Implementação do Algoritmo em Planilha Eletrônica** é apresentada a abordagem deste algoritmo de PLMO. Comparações preliminares apontam para o potencial do método como uma alternativa de resolução para PLMO, principalmente em ambiente acadêmico e empresarial, uma vez que a utilização da planilha Excel com o uso do Solver torna sua utilização mais simples, em função da popularidade da ferramenta, além de implicar em custos adicionais.

2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A tomada de decisão num ambiente complexo faz parte do cotidiano da gestão. Problemas de decisão multiobjetivo permitem – pela sua natureza – formular um grande número de aplicações da vida real com muito mais realismo. Os gestores, ou outros agentes tomadores de decisão (AD), num caso geral, lidam com a necessidade de resolverem problemas com múltiplos pontos de vista (ou objetivos), geralmente conflitantes, que surgem na atualidade. A ruptura no paradigma da otimalidade inerente a Programação Multiobjetivo faz com que, a menos de situações triviais, não se encontre a solução ótima considerando-se todos os objetivos simultaneamente, mas um conjunto de ótimos de Pareto (soluções não dominadas). Uma solução é dita ótima de Pareto se não for possível melhorar em um objetivo sem piorar em pelo menos um dos outros. A solução final a ser preferida pelo AD deverá pertencer a esse conjunto e é denominada solução de compromisso.

Devido à incomparabilidade das soluções não dominadas através da ordem (parcial) natural em problemas multiobjetivo, torna-se necessário fazer intervir no processo de pesquisa não apenas por meios técnicos de geração de soluções não dominadas, como também agregando informações decorrentes das preferências do decisor. A abordagem interativa possibilita que o decisor assuma um papel central no processo de decisão, e pode ser considerada mais adequada para a abordagem deste tipo de problemas, podendo contribuir para minimizar o esforço computacional e/ou o esforço cognitivo exigido ao decisor.

A geração de soluções não dominadas para avaliação do decisor é o ponto central na programação multiobjetivo. Existem vários métodos para determinar estas soluções não dominadas e todos esses métodos utilizam um processo de escalarização que consiste na transformação do problema multiobjetivo em um problema de otimização de uma função escalar substituta, cuja solução ótima é uma solução eficiente do problema PLMO, incluindo parâmetros de informação das preferências do decisor (Clímaco, Alves, 2005)(Noussair, Matheny, 2000). Os métodos geradores do conjunto das soluções não dominadas revelam-se pouco atrativos do ponto de vista prático (Clímaco *et al.* 2003). Isto porque demandam um enorme esforço computacional e implicam confrontar o AD com centenas ou milhares de soluções. Uma alternativa a esses métodos é permitir a intervenção do decisor durante o processo decisório de modo que este obtenha mais informações sobre o problema, possibilitando convergir para a solução de compromisso satisfatória (Alves, 2000).

3. PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA (PPM)

A característica comum aos denominados Problemas de Programação Matemática (PPM) é que todos envolvem o conceito de otimização. Tipicamente, deseja-se maximizar ou minimizar uma determinada grandeza. Entende-se por PPM o problema da determinação de $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = \text{Max/Min}\ \{f(x): x \in S\}$. O conjunto S é denominado conjunto de soluções viáveis do problema e, em geral, é representado por um grupo de restrições

$$S = \left\{ x \in X : g_i \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \end{matrix} 0, i = 1,2,\ldots,m \right\}$$

onde g_i denota uma função real cujo domínio é X. Se o conjunto viável é definido por um conjunto de restrições lineares e a função objetivo também é linear, temos então definido um Problema de Programação Linear (PPL). Assim, a definição completa de um PPL é caracterizada pela especificação de uma medida de eficiência do sistema, que deverá ser expressa em função das variáveis de decisão que, por sua vez, correspondem às grandezas sobre as quais possuímos controle e, finalmente, pela especificação do conjunto de relações que restringem os valores que as variáveis de decisão podem assumir.

A existência de um único critério torna o problema de decisão, trivial, no sentido em que se resume a uma mensuração, não sendo realmente necessária nenhuma decisão. Observemos, no entanto, que o problema em questão pode ser absolutamente nada simples, implicando em considerações técnicas elaboradas.

4. CONCEITOS FUNDAMENTAIS: ELEMENTOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTICRITÉRIO – "PROBLEMAS DE DECISÃO NÃO TRIVIAIS"

A tomada de decisão constitui uma tarefa básica e crítica da gestão. Em situações onde a pressão do tempo é grande, opta-se com freqüência por modelos em que apenas um critério de decisão assume caráter fundamental. Contudo, a complexidade dos problemas reais é essencialmente caracterizada pela existência de múltiplos critérios, muitas vezes conflitantes, que refletem aspectos econômicos, sociais, políticos, físicos, psicológicos, éticos, etc., num dado contexto (e interligados). A percepção que a PM está focada na otimização de um único objetivo faz com que muitas vezes tenhamos que adotar a idéia simplificadora da aproximação monocritério. Entretanto, se os diferentes aspectos da realidade forem considerados, a compreensão dos problemas e os modelos matemáticos que lhe dão suporte, tornam-se mais realistas.

4.1 O PLMO

A denominação genérica Multicritério(Roy e Bouysson, 1993) engloba dois tipos básicos de problemas: os problemas Multiobjetivo e os problemas Multiatributo (Clímaco *et al*, 2003, 2005) (Alves 2000)(Dias et al, 1996)

Um problema Multiatributo caracteriza-se pela existência de um número finito de alternativas e os atributos, bem como as alternativas, são conhecidos explicitamente (Gomes *et al.*, 2009), enquanto os Multiobjetivo, pela existência de um conjunto de soluções admissíveis definidas através de um conjunto de restrições e onde os objetivos são explicitados através de FO, utilizam a estrutura da programação matemática (Luque *et al.*, 2009). Nos problemas multiobjetivo várias funções objetivo têm de ser otimizadas simultaneamente (Luque *et al.*, 2009), entretanto, em geral, nos problemas multiobjetivos não existe uma solução que otimize simultaneamente todas as FO (Alves, 2000).

Este trabalho trata apenas da Programação Linear Multiobjetivo, cuja descrição passa-se agora a apresentar.

Formulação Matemática (sem perda de generalidade, iremos considera-se que as FO são todas de maximização):

Max

$$Z_1 = Z_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j$$

...

$$Z_p = Z_p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{pj} x_j$$

s.a $\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad$ i = 1,...,

m

$x_{ij} \geq 0$

Onde:
p = nº de critérios;
i = nº de restrições do modelo;
j = nº de variáveis de decisão.

Problemas multiobjetivos consistem na otimização de um vetor composto por funções escalares, escolhidas como forma de avaliar o impacto das decisões factíveis do problema, de acordo com diferentes índices de desempenho (Oliveira e Ferreira, 2003).

Na resolução de modelos com um único objetivo, deseja-se encontrar a solução ótima, isto é, que torna máximo (mínimo) o valor da FO. É neste ponto que a Programação Multiobjetivo se diferencia dos demais problemas de otimização, ou seja, quanto ao sentido que o conceito de solução do problema assume (Steuer, 1977, 1986) (Steuer e Gardiner, 1994). O conceito tradicional não é mais aplicável. A menos, é claro, do caso trivial em que existe uma solução que otimiza todos os objetivos ao mesmo tempo. Usualmente, é necessário ponderar os objetivos conflitantes e tentar encontrar uma solução de compromisso satisfatória (Buchanan e Gardiner, 2003). É importante destacarmos a mudança no paradigma de otimalidade até então vigente.

A "otimização" multiobjetivo busca encontrar o conjunto de pontos "ótimos", os componentes de uma função objetivo vetorial (o vetor é composto pelas varias funções objetivos a serem "otimizadas") em que, diferentemente da otimização monobjetivo, a solução do problema é um conjunto de pontos (soluções) eficientes. Cada solução eficiente é ótima no sentido de que nenhuma melhoria pode ser alcançada em um componente da função vetorial sem que haja piora de pelo menos um dos componentes restantes da função vetorial (Shi, 2001). Dentro do conjunto de soluções eficientes o decisor escolherá a que julgue mais satisfatória.

4.1.1 Definições básicas

Alternativa Dominada: uma solução é dominada se e somente se existe uma outra melhor em pelo menos um critério, sem ser pior em algum dos outros.

Alternativa Não-Dominada (Eficiente ou Ótima de Pareto): uma solução é eficiente se e somente se não é dominada por alguma solução admissível (Korhonen e Wallenius, 1988). Na formulação multiobjetivo uma solução não dominada seria uma solução que superasse outra solução em todos os objetivos. Como isto não acontece não se encontra a alternativa eficiente.

Solução Ideal: solução em geral não viável definida no espaço dos atributos. É constituída pelos ótimos individuais das funções objetivo (ou possui simultaneamente a classificação máxima possível em todos os critérios de avaliação).

Curva de Indiferença: lugar geométrico (espaço dos atributos) das soluções a que o agente de decisão (AD) dá o mesmo valor. Também denominada região de indiferença conduzem à mesma solução, ou conjunto de soluções não dominadas (Alves, 2000).

Trade-Off (Valor de Compensação entre dois atributos X e Y): relação entre o que é preciso perder em X para ganhar em uma unidade em Y, sem sair da curva de indiferença.

Pesos de Importância relativa dos atributos: se houver independência aditiva nas preferências entre atributos, os Trade-Offs permitem deduzir pesos de importância relativa. Se, além disso, os "*trade-offs*" foram constantes, os pesos também serão constantes.

Em resumo, pode-se dizer que o conceito chave da programação linear monocritério é obter a solução ótima, enquanto na programação multicritério é encontrar a solução não dominada (ou conjunto das melhores ações não dominadas). Na formulação multiobjetivo torna-se necessário encontrar uma solução de compromisso.

4.2 CLASSIFICAÇÃO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DEDICADOS À PLMO: GRANDES LINHAS PARA A SUA ABORDAGEM

Há diversas classificações para os métodos de resolução de PLMO. Clímaco et al (2003) e Alves (2000) destacam as seguintes abordagens: classificação baseada no grau de intervenção do agente de decisão, baseada no tipo de estruturação de preferências do agente de decisão do agente de decisão, no número de agentes de decisão, no grau de incerteza na determinação dos parâmetros do modelo e, finalmente, a classificação baseada nas entradas requeridas e/ou resultados obtidos.

Em função da natureza da proposta apresentada neste artigo, apenas a primeira abordagem será destacada.

4.2.1 Classificação baseada no grau de intervenção do agente de decisão

Opção Normativa ou agregação a priori: é feita uma agregação a *priori* de preferências. O agente de decisão começa por indicar suas preferências, a partir das quais é possível transformar o problema inicial em uma modelagem monocritério. Utiliza conceitos como função de valor, teoria da utilidade ou distância ao ideal.

Agregação progressiva de preferências do agente de decisão: alternam fase de cálculo de soluções eficientes com fases de diálogo com o AD (métodos interativos). Esse diálogo gera indicações do AD que servem de base para o cálculo de novas soluções eficientes.

Agregação a posteriori de preferências: é o que ocorre quando se usam métodos geradores de todo o conjunto das soluções eficientes, sendo a agregação de preferências do AD feita a *posteriori*.

4.3 MÉTODOS INTERATIVOS PLMO

As abordagens de PLMO que ignoram ou restringem o papel do AD são bastante populares, mas essas abordagens podem ser questionadas, na medida em que problemas de decisão não podem ser completamente definidos por leis categóricas.

Os métodos interativos permitem que o AD acompanhe passo-a-passo as consequências que suas preferências vão acarretando nas soluções geradas. Deste modo, o AD pode conduzir a direção da busca na região das soluções admissíveis, evoluindo para a solução preferida a partir de decisões parciais que vão sendo apresentadas. Assim, a estrutura de preferências do decisor é gradualmente descoberta ao longo do processo.

São procedimentos interativos (Sun *et al*, 1996 e 2000) que intercalam uma iteração de cálculo da solução com uma fase de diálogo com o AD que recebe a solução proposta e, a partir de seu juízo de valores, pode propor novas condições necessárias para o processamento de uma nova iteração.

Os procedimentos interativos podem ser basicamente categorizados em função da estratégia de redução do âmbito da pesquisa, do tipo de função escalar substituta utilizada e pelo nível de flexibilidade dada ao decisor de intervir no processo: se livre ou aos uma seqüência pré-determinada de fases de cálculo e diálogo. Deve-se destacar que estas classificações não são mutuamente exaustivas.

Em 1971, Benayoun *et al.* apresentaram o Step Method (STEM), que realiza uma redução progressiva da região viável e que na sua fase de decisão solicita que o AD indique qual a quantidade que está disposto a sacrificar nas FOs que considera mais satisfatórias de modo a melhorar as demais. O método TRIMAP (Clímaco eT al, 1987, 2002) é constituído por um conjunto de procedimentos que permite uma pesquisa livre, com base em uma aprendizagem progressiva e seletiva do conjunto de soluções não dominadas. O TRIMAP está restrito a problemas com três FOs, mas esta limitação por outro lado permite o uso de meios gráficos adequados ao diálogo com o decisor. Outros métodos interativos são: Zionts e Wallenius (1976, 1983) – realiza redução do espaço paramétrico, Método Pareto Race (Korhonen e Wallenius 1988) – realiza pesquisa linear, ICW (Steur, 1977, 1986) – contração do cone dos critérios.

Deve-se observar que a implementação do algoritmo aqui proposto em ambiente de planilha Excel se enquadra no grupo *Opção Normativa ou agregação a priori*: quando atribuem importância às FO. O uso da programação por metas (Romero, 2004), bem como a possibilidade de mudança das importâncias atribuídas as FO, permite a implementação proposta ser enquadrada como método interativo.

Considerando os métodos de classificações em PLMO acima descritos, pode-se classificar o algoritmo proposto para implementação em planilha eletrônica como será visto adiante pode ser classificado como um método de articulação a priori visto que o decisor estabelece as preferências antes da primeira iteração; e de articulação progressiva pois permite que o decisor altere suas preferências na solução de cálculos na busca de soluções eficientes. O algoritmo cria uma função de utilidade global e utiliza uma formulação determinística.

5. LÓGICA NEBULOSA

A Lógica Nebulosa (*Fuzzy*) se preocupa com os princípios formais do raciocínio aproximado. O objetivo é modelar os modos imprecisos do raciocínio que têm um papel fundamental na habilidade humana de tomar decisões. Lógica Nebulosa é uma ferramenta capaz de capturar informações imprecisas, descritas em linguagem natural, e convertê-las para um formato numérico. Sua potencialidade está em fornecer os fundamentos para efetuar um raciocínio aproximado, com proposições imprecisas, usando a teoria de conjuntos nebulosos como ferramenta principal. A Lógica Nebulosa foi desenvolvida por Lofti A. Zadeh da Universidade da Califórnia em Berkeley na década de 60 para poder representar o pensamento humano, ou seja, ligar a lingüística e a inteligência humana, pois muitos conceitos são melhores definidos por palavras do que pela matemática.

A Teoria de Conjuntos Nebulosos sustenta a lógica nebulosa, assim como a lógica binária tradicional sustenta a Teoria dos Conjuntos. A lógica nebulosa permite que um elemento pertença parcialmente a um determinado conjunto de acordo com um valor entre 0 e 1 chamado *grau de pertinência*. Observações de natureza qualitativa, conceitos inerentemente vagos e conhecimento impreciso e incompleto são algumas motivações para esta lógica.

A Teoria de Conjuntos Nebulosos lida com a incerteza e a imprecisão sob um ponto de vista não probabilístico. Elas estão presentes nas definições de um conceito ou no significado de uma expressão lingüística tais como local seguro, produto bonito, sendo mais fáceis de serem interpretadas. A teoria dos conjuntos nebulosos é baseada no uso de aproximações, chegando a um valor "*fuzzificado*". Este valor não precisa ser necessariamente 0 (zero) ou 1 (um). O grau de pertinência dos elementos deste conjunto é especificado da seguinte forma:

- 1 (um), indica que o elemento é compatível com o conjunto nebuloso;
- 0, (zero) indica que o elemento é incompatível com o conjunto nebuloso; e
- (0, 1), indica que o elemento é parcialmente compatível com o conjunto nebuloso.

A teoria da lógica nebulosa foi a que permitiu o maior refinamento na modelagem dos dados; as funções nebulosas possibilitaram a incorporação do conhecimento de forma bastante realista, resultando em objetivos mais coerentes e menos sujeitos a erros. Outra vantagem da modelagem *Nebulosa* é a maior quantidade de operadores o que representa maior flexibilidade na combinação das evidências.

5.1 MODELAGEM COM RELAÇÃO DE PREFERÊNCIA NEBULOSA

Ao conduzir-se a solução interativa de um PLMO é preciso estabelecer como esclarecer as preferências do decisor sobre o conjunto de soluções viáveis, definir uma representação para esta estrutura de preferência identificada, assim como, apresentar um procedimento para condução da busca por melhores soluções. Quando se têm diferentes fatores que contribuem para uma decisão encontramos dificuldade na determinação da contribuição relativa de cada um. Ekel (2002) mostra que problemas com coeficientes nebulosos apenas na FO podem ser resolvidos realizando algumas modificações em métodos tradicionais de PM. Em particular, para problemas de otimização, destaca vantagens pela possibilidade de obtenção de soluções mais efetivas (menos "cautelosas") e de caráter computacional.

Em Ekel e Galperin (2003) um sistema interativo adaptativo é desenvolvido para aplicações práticas relacionadas com gerenciamento de cargas com uso da abordagem de Bellman-Zadeh para tomada de decisões em ambiente *fuzzy*. (Sun et all (2000), propõem um Feed-Forward Artificial Neural Networks utilizando os pontos ZiMax e ZiNad (ponto Nadir), criando o seguinte "indicador": Zi' = (Zi – ZiNad)÷(ZiMax – ZiNad); proposta semelhante é encontrada em Chen e Lin (2003) que substituem o termo Zinad por Zmin, ou seja, o menor valor que FO pode assumir.

Inspirado nos resultados expostos, optou-se pela elaboração de uma função de pertinência baseada nos valores máximos e mínimos que a FO pode assumir, e criar uma extensão ao algoritmo inicialmente proposto (Gomes e Chaves, 2006).

6. PROPOSTA PARA IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO EM PLANILHA ELETRÔNICA

Na proposta descrita em Gomes e Chaves (2004 e 2005) o decisor verifica o quanto as FO se aproximavam do ponto máximo (ou mínimo); entretanto a fronteira de eficiência era determinada pela soma ponderada dos valores obtidos pelas FO. Nesta extensão, a fronteira eficiente será determinada pelo grau de aproximação das FO do ponto máximo, e o grau de aproximação (indicador) será uma função de pertinência. Utilizando este indicador como um coeficiente Fuzzy, poder-se-á propor a busca da maximização deste coeficiente. Esta abordagem é um processo iterativo que realiza uma pesquisa livre e vai gradualmente restringindo a região admissível. Não há, portanto, uma convergência matemática no sentido estrito. O processo termina quando o decisor encontrar uma solução satisfatória. Este método é uma ampliação da proposta de Ragsdale (2003). Ragsdale propõe o uso de planilhas na busca de soluções eficientes, entretanto foca a modelagem em problemas com uma única função objetivo. Esta proposta permite o uso de mais de uma função objetivo, bem como a interação do decisor, alterando a importância das FOs, e assim fazendo uma análise de sensibilidade dos resultados.

Cada iteração deste algoritmo envolve uma resolução do PPL subjacente. O que é por si só, uma evolução em relação ao STEM (Climaco *et al*, 2003). Para uma explanação detalhada do conceito da minimização da distância ponderada de Tchebycheff do Step Method (STEM) e o conceito de escalonamento das funções objetivo do Método Lexicográfico consulte Clímaco *et al* (2003) e Knoblauch (2000). Existem varias linguagens de programação disponíveis no mercado, que permitem a implementação de modelos de Programação Matemática, e linguagens que permite programação algébrica. Todas requerem por parte do modelador o consumo tempo na modelagem e implementação do programa. Não é o propósito deste artigo fazer a comparação das mesmas. Salienta-se que a popularidade do uso de planilhas eletrônicas no meio empresarial, a familiaridade com a interface e o baixo custo operacional do uso de planilhas eletrônicas, e a facilidade de implementar os modelos de programação na própria planilha, com o uso do Solver, não requerendo assim a necessidade de se criar linhas de programação, e nem a necessidade de contratar um programador, para futuras aplicações reais na empresa, nos fez decidir pelo uso da ferramenta Solver disponível no Excel da Microsoft. Além disso, a ferramenta também está disponível no meio acadêmico o que facilita o ensino e o aprendizado deste novo modelo e ferramenta de apoio à tomada de decisão.

Passo 1: Inicialmente, o decisor institui sua ordenação de preferência de modo a estabelecer uma hierarquia entre os objetivos; em seguida, determinamos os ótimos individuais de cada um dos objetivos;

Passo 2: Introduzir uma nova FO que minimiza o somatório das diferenças para cada objetivo entre o ótimo idealizado e o alcançável (Max). Entretanto, no caso de min, desejamos minimizar a diferença entre o mínimo alcançável e o mínimo ideal. Este é o conceito adaptado da minimização ponderada de Tchebycheff.

$$Min \quad FO = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (Max \quad Z_i - Z_i)$$

Análise da solução pelo decisor.

Passos 3, 4 e 5: Através de alterações nas restrições, é obtida uma solução "meta-ótima". Análise da solução pelo decisor, que explicita suas preferências, altera os valores de λ_i de forma iterativa. Admite-se a inclusão de novas restrições, como por exemplo, uma FO assumir um valor mínimo e/ou uma FO ter de assumir valor superior/inferior a outra (encontra-se aqui a adaptação do conceito do escalonamento das funções objetivo e da Programação por Metas). Retorna ao Passo 2. Identifica as soluções não dominadas. Toma-se a decisão.

O método proposto possui assim a vantagem de:

a) facilmente implementável em uma planilha eletrônica, o que permite seu uso em ambiente acadêmico e empresarial;
b) possibilita que o decisor estabelece suas preferências com o uso de pesos;
c) possibilita alterar as restrições, refazendo alocação de recursos;
d) permite quantificar, por uso de um índice, o quanto uma FO foi atingida, considerando que a satisfação máxima é igual a um, quando a função objetivo atinge seu valor máximo (a obtenção do valor máximo de uma FO é limitado pelo atendimento das demais).

7. COMPARAÇÃO DO MÉTODO – EXEMPLOS ILUSTRATIVOS – USO DA EXTENSÃO NEBULOSA

Descrevemos a seguir um experimento computacional com o algoritmo proposto a um modelo de PLMO e apresentamos os resultados obtidos na comparação pelo método a outros modelos de PLMO. Os resultados encontrados pelos algoritmos de STEM, Zionts-Wallenius e Tommix, nestes mesmos modelos encontram-se sumarizados nas tabelas que se seguem (para maiores detalhes sobre estes algoritmos ver Clímaco et al (2003)).

Clímaco *et al* (2003) afirma que os métodos de programação Multiobjetivo têm duas fases: uma primeira fase denominada de cálculo e, uma segunda, denominada fase do diálogo. As alterações de restrições, inclusão de restrições, atribuição de maior importância para uma FO em relação à outra, alternando o valor de l_i são inclusas na fase dita diálogo (Passo 4 do PIAPE – **P**roposta da **I**mplementação em **A**mbiente de **P**lanilha **E**letrônica). A modelagem inicial e primeira solução do ponto ótimo de cada FO, e a solução inicial da nova FO são as fases de cálculo (Passos 1, 2 e 3 do PIAPE).

7.1. ESTUDO COMPARATIVO COM ZIONTS WALLENIUS (ZW) E TOMMIX.

Maximizar:

$Z_1 = 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + x_4$
$Z_2 = 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 4x_4$
$Z_3 = -1x_1 + 5x_2 + 1x_3 + 2x_4$

S.a:

$s_1: \ 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60$
$s_2: \ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 \leq 60$
$s_3: \ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 50$
$s_4: \ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Observação: exemplo constante na referência (Climaco *et al*, 2003, páginas 159 e 165). A maximização pura e simples das funções, ignorando as demais, mantendo as restrições, gera as Tabelas I, II e III.

Tabela I. Maximização de Z_1

Max	x_1	x_2	x_3	x_4
$Z_1 = 66$	18	0	6	0
$s_1 = 60$	$s_2 = 60$	$s_3 = 50$		
Outras FO	$Z_2 =$	30	$Z_3 =$	-12

Tabela II. Maximização de Z_2

Max	x_1	x_2	x_3	x_4
$Z_2 = 50$	14	0	0	9
$s_1 = 60$	$s_2 = 60$	$s_3 = 50$		
Outras FO	$Z_1 =$	51	$Z_3 =$	4

Tabela III. Maximização de Z_3

Max	x_1	x_2	x_3	x_4
$Z_3 = 75$	0	15	0	0
$s_1 = 60$	$s_2 = 60$	$s_3 = 50$		
Outras FO	$Z_1 =$	15	$Z_2 =$	-15

A solução apresentada no livro, ou seja, a solução utilizando Zionts Wallenius é: $x_1 = 14,5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2,5$; $x_4 = 7$; e $Z_1 = 55,5$; $Z_2 = 47,5$; $Z_3 = 2$. A proposta da implementação em ambiente de planilha eletrônica (PIAPE) é apresentada na Tabela IV, após executar os passos 1 e 2.

Passo 1: criação das Tabelas I, II e III (ótimos individuais de cada FO).

Passo 2: cria-se uma nova FO buscando minimizar a diferença entre o resultado da função e o ponto máximo que esta poderia alcançar.
Minimizar $\lambda_1 (MaxZ_1 – Z_1) + \lambda_2 (MaxZ_2 – Z_2) + \lambda_3 (MaxZ_3 – Z_3)$, assim sendo a FO seria:

Minimizar FO = $\lambda_1(66 - Z_1) + \lambda_2(50 - Z_2) + \lambda_3(75 - Z_3)$, neste exemplo em particular faremos todos os $_{i}$ iguais a λ. Onde λ é a importância que o decisor atribui à casa função.

As variáveis terão como restrição o valor máximo obtido nas otimizações individuais:

$s_{4:}\ x_{1,} x_2, x_{3,} x_4 \geq 0$

$s_{5:}\ x_1 \leq 18$; $s_{6:} x_2 \leq 15$; $s_{7:} x_3 \leq 6$, $s_{8:} x_4 \leq 9$

$s_{9:}\ Z_1, Z_2, Z_3 > 0$

Tabela IV. comparação ZW com PIAPE

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z_1	Z_2	Z_3	Soma
ZW	14,5	0	2,5	7	55,5	47,5	2	105
PIAPE	14	0	0	9	51	50	4	105

Neste exemplo o algoritmo consegue uma resposta em que o somatório dos valores obtidos pelas FOs $Z_{1,}$ $Z_{2,}$ e $Z_{3,}$ no caso 105, é o mesmo valor do somatório das FOs obtido pelo método ZW(Tabela IV). Os Passos 3 e 4 não foram implementados.

A Tabela V apresenta a solução proposta pelo método comparada com a solução proposta pelo Tommix.

Tabela V. comparação Tommix com PIAPE

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z_1	Z_2	Z_3	Soma
Tommix	17,5	7,0	9,5	0	48,5	19,5	37	105
PIAPE	14	0	0	9	51	50	4	105

Consegue-se com o PIAPE, a semelhança do ocorrido com o ZW, agora com o Tommix, um ponto onde o somatório das FOs obtêm o valor 105 (Tabela V). Esta análise permite identificar que os métodos consideram que os pontos onde o somatório das FOs obtêm valor 105 estão na fronteira de eficiência.

A Tabela VI apresenta a proposta de solução usando a Função de Pertinência.

Tabela VI. utilizando a Função de Pertinência

<table>
<tr><td>Variáveis</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td rowspan="2">Somatório</td></tr>
<tr><td>FO</td><td>14,50</td><td>0,0</td><td>2,5</td><td>7,0</td></tr>
<tr><td>Z_1</td><td colspan="4">=</td><td>55,5</td></tr>
<tr><td>Z_2</td><td colspan="4">=</td><td>47,5</td></tr>
<tr><td>Z_3</td><td colspan="4">=</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="4">$Z_1 + Z_2 + Z_3$=</td><td>105,0</td></tr>
<tr><td>Z_1</td><td>Z_2</td><td colspan="2">Z_3</td><td rowspan="2">= 2,0340</td></tr>
<tr><td>Função de Pertinência</td><td>0,8409</td><td>0,9615</td><td colspan="2">0,2316</td></tr>
</table>

O somatório de Z1, Z2 e Z3 permaneceu em 105 gerando o ponto ótimo igual ao do ZW. A função de pertinência mantém a sugestão dentro da fronteira de eficiência gerando ao decisor "outro ponto" com mesma atratividade. O decisor tem como exercer o processo decisório e dentro da sua subjetividade optar por quais dos dois pontos sugeridos pelo PIAPE, o primeiro (14 , 0 , 0 , 9), sem o uso da função de pertinência, ou o segundo (14,5 , 0 , 2,5 , 7), com o uso da função de pertinência.

Revendo as restrições de forma a obter uma solução "meta ótima", exemplificando; S.a:

$s_1:\ 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60$

$s_2:\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 \leq 60$

$s_3:\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 50$

$s_4:\ x_{1,} x_2, x_{3,} x_4 \geq 0$

Passo 3: as restrições são alteradas, onde S_1 será menor que uma variável A, e S_2 menor que uma variável B, e S_3 menor que uma variável C, onde A+B+C $\leq$ 170 (= 60 + 60 + 50), e A, B, C > 0.

Tabela VII. comparação ZW com PIAPE e a solução do Passo 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z_1	Z_2	Z_3	Soma
ZW	14,5	0	2,5	7	55,5	47,5	2	105
PIAPE	14	0	0	9	51	50	4	105
Meta Ótima	0	0	0	18,89	18,89	75,56	37,78	132,22

Nesta Solução "Meta Ótima", s_1 = 56, 6 (manteve a restrição original de ≤ 60) ; s_2 = 37,7 (manteve a restrição original de ≤ 60) ; s_3 = 75,5 (ultrapassou a restrição original de ≤ 50), ou seja, houve uma transferência de "recursos" de s_1 e s_2 para s_3. (Tabela VII)

Passo 4: Caso o decisor julgasse que o valor de Z_1 ficou muito baixo, uma vez que só nesta solução ocorreu que a função Z_1 teve um valor menor que Z_2, poderia acrescentar uma nova restrição $Z_1 > Z_2$, e assim obteria a seguinte solução (Tabela VIII):

Tabela VIII – implementação do Passo 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z_1	Z_2	Z_3	Soma
PIAPE	14	0	0	9	51	50	4	105
Meta Ótima	0	0	0	18,89	18,89	75,56	37,78	132,22
Meta Ótima onde $Z_1 > Z_2$	0,00	13,08	0	8,72	21,80	21,79	82,83	126,41

Ou a restrição $Z_1 > Z_2 > Z_{3,}$ constante na Tabela IX.

Tabela IX. novas restrições representando as preferências do decisor

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z_1	Z_2	Z_3	Soma
PIAPE	14	0	0	9	51	50	4	105
Meta Ótima	0	0	0	18,89	18,89	75,56	37,78	132,22
Meta Ótima onde $Z_1 > Z_2 > Z_3$	7,99	5,70	0,00	9,13	38,8	38,79	38,78	116,37
Meta Ótima onde $Z_1 > Z_2$	0	13,08	0,00	8,72	21,80	21,79	82,83	126,41

Da mesma forma poder-se-ia colocar restrições com valor mínimo para cada Fn.

Passo 5: o decisor escolhe a solução.

7.2 COMPARANDO COM O ALGORITMO STEM (CLIMACO ET AL, 2003, PÁG 150)

Maximizar

$Z_1 = x_1 + 4x_2 + x_3$

$Z_2 = 2x_1 + 3x_2 + 7x_3$

Minimizar

$Z_3 = 10x_1 + 2x_2 + x_3$

$Z_4 = x_1 + x_2 + 7x_3$

S.a:

$s_1: \ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \leq 60$

$s_2: \ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad \leq 180$

$s_3: \ x_1 + x_2 + x_3 \quad \geq 0$

$s_4: \ x_{1,} x_2, x_3 \quad \geq 0$

Passo 1: A otimização individual das funções gera o resultado constante na Tabela X:

Tabela X. Passo 1

	Max Z_1	Max Z_2	Min Z_3	Min Z_4
Z_1	120	45	0	0
Z_2	90	315	0	0
Z_3	60	45	0	0
Z_4	30	315	0	0

Aplicando o algoritmo.

Passo 2: Min = λ_1(Max $Z_1 - Z_1$) + λ_2(Max $Z_2 - Z_2$) + λ_3(Z_3 – Min Z_3) +λ_4(Z_4 – Min Z_4) = 295, onde o resultado encontra-se na Tabela XI.

Tabela XI. Passo 2

	x_1	x_2	x_3	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
PIAPE	0	30	0	120	90	60	30
Solução STEM	12,058	18,64	10,66	109,34	154,66	168,52	105,32

STEM: $Z_1 + Z_2 = 264$ & $Z_3 + Z_4 = 273{,}84$
PIAPE: $Z_1 + Z_2 = 210$ & $Z_3 + Z_4 = 90$
Diferença = 54 = 183,84

Houve uma perda de 54 unidades no somatório das FO que deveriam ser maximizadas e um ganho de 183,84 nas FO que deveriam ser minimizadas. Caberá ao decisor verificar se este resultado em que ocorre a perda de 54 unidades o somatório das FO que deveriam ser maximizadas supera o ganho de 183,84 nas FO que deveriam ser minimizadas. Caso assim o considere, poderá optar pela sugestão do PIAPE.

Passo 4: O decisor poderia querer atribuir uma maior importância às FO de maximizar em detrimento das de minimizar, e em vez de apenas fazer $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, poderia fazer $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, ou poderia atribuir maior importância às funções de minimizar em detrimento das de maximizar, e fazer $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 =1$; $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 3$.

O resultado encontra-se na Tabela XII.

Tabela XII – implementação do Passo 4

	x_1	x_2	x_3	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Solução : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$	0	30	0	120	90	60	30
Solução : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$	0	12	36	84	288	60	264
Solução : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 =1$; $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 3$	0	0	0	0	0	0	0

Passo 5: O decisor escolhe a solução.

A Tabela XIII apresenta o resultado com a aplicação da função de pertinência.

Tabela XIII. uso da função de pertinência

Variáveis	x_1	x_2	x_3	Somatório	
FO	0,0	30,0	0,0		
Z_1	=			120,0	
Z_2	=			90,0	
Z_3	=			60,0	
Z_4	=			30,0	
$Z_1 + Z_2$ **=210,0**			$Z_3 + Z_4$**=90,0**		
Função de Pertinência	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	**Somatório**
	1,0	0,2857	0,8	0,0952	= 2,181

A FO Z1 obtém pertinência igual a um. O ponto obtido (0 ; 30 ; 0) é o mesmo obtido pela versão não estendida do PIAPE.

7.3 COMPARANDO COM O MÉTODO PROJEÇÃO DOS GRADIENTES DAS FUNÇÕES OBJETIVO DESCRITO EM (COSTA E CLÍMACO, 1998)

Maximizar:

$$Z_1 = x_1$$
$$Z_2 = x_2$$
$$Z_3 = x_3$$

S.a:

$s_1: \; 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad \leq 18$

$s_2: \; x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \leq 10$

$s_3: \; 9x_1 + 20x_2 + 7x_3 \quad \leq 96$

$s_4: \; 7x_1 + 20x_2 + 9x_3 \quad \leq 96$

$s_5: \; x_{1,} x_2, x_{3,} x_4 \quad \geq 0$

Passo 1: A otimização individual das funções gera os resultados da Tabela XIV:

Tabela XIV. Passo 1

	x_1	x_2	x_3
Z_1max	6	0	0
Z_2max	0	4,8	0
Z_3max	0	0	6

Passo 2: A função a ser gerada pelo PIAPE é: FO = Min $(\lambda_1(6 - Z_1) + \lambda_2(4{,}8 - Z_2) + \lambda_3(6 - Z_3))$, onde a solução do algoritmo: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$.

Neste caso temos $Z_1 + Z_2 + Z_{3,}$ que neste caso é igual a $x_1 + x_2 + x_3 = 4 + 3 + 0 = 7$. No artigo de referência (Costa & Clímaco, 1998) temos como resultado $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, que gera o mesmo somatório, ou seja, 7.

A Tabela XV apresenta os resultados com o uso da função de pertinência.

Tabela XV. uso da função de pertinência

Variáveis	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	**Somatório**
FO	1,8824	3	2,1176	
Z_1	=			1,8824
Z_2	=			3,0000
Z_3	=			2,1176
	$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 7$			
	Z_1	Z_2	Z_3	**Somatório**
Função de Pertinência	0,3137	0,6250	0,3529	= 1,29171

Nesta aplicação foi encontrado "um ponto novo" na fronteira de eficiência que difere da aplicação original do PIAPE e da Projeção de Gradientes. Verifica-se que o método estendido também tem aplicação na busca de novos pontos na fronteira de eficiência.

Passo 3:
Maximizar

$$Z_1 = x_1;$$
$$Z_2 = x_2;$$
$$Z_3 = x_3;$$

S.a:

$$s_1 : 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq a$$
$$s_2 : x_1 + 2x_2 + x_3 \leq b$$
$$s_3 : 9x_1 + 20x_2 + 7x_3 \leq c$$
$$s_4 : 7x_1 + 20x_2 + 9x_3 \leq d$$
$$s_5 : a + b + c + d \leq 220 \ (= 18 + 10 + 96 + 96)$$
$$s_6 : x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$
$$s_7 : a, b, c, d \geq 0$$

Tendo como solução $x_1 = 11$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Passo 5: o decisor faz a escolha.

7.4 COMPARAÇÃO COM MODELO PROPOSTO POR EKEL E GALPERI (2003)

Maximizar

$$Z_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3$$

Minimizar

$$Z_1 = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$
$$Z_3 = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3$$

S.a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Sugestão do modelo sem extensão (20, 0, 0). Aplicando o modelo estendido obteve-se o mesmo ponto. Comparando com os pontos propostos, Tabela XVI, no artigo em referencia (14, 2, 4); (10, 6, 4):

Tabela XVI. comparação com Ekel e Galperi (2003)

x_1	20	14	10
x_2	0	2	6
x_3	0	4	4
	$Z_1 = 40$ $Z_2 = 100$ $Z_3 = 100$	$Z_1 = 40$ $Z_2 = 102$ $Z_3 = 110$ Z_2 superior em 2; Z_1 igual e Z_3 inferior em 10	$Z_1 = 48$ $Z_2 = 106$ $Z_3 = 114$ Z_2 superior em 6; Z_1 inferior em 8 e Z_3 inferior em 14

Os decisores talvez estejam interessados de buscar uma solução dita "harmoniosa" onde buscar-se-ia que todas as funções objetivos sejam igualmente satisfeitas. Neste caso utilizando a função de pertinência: Zi' = (Zi – ZiNad)÷(ZiMax – ZiNad); Definição de ZiNad e ZiMax para cada função Zi.
Função Z_2, Z_2Max = 120 e Z_2Nad = 0
As funções Z_1, e Z_3, são minimizadas, logo:
Função Z_1, Z_1Min = 0 e Z_1Max = 80; Z_3, Z_3Min = 0 e Z_3Max = 140

Considerando a Fomulação $(Z_2 - 0) \div (120 - 0) = (Z_1 - 80) \div (0 - 80) = (Z_3 - 140) \div (0 - 140)$

Obtêm os seguintes valores:

$x_1 = 4{,}6153898$; $x_2 = 6{,}923083$ e $x_3 = 0$; onde $Z_1 = 36{,}92311$;

$Z_2 = 64{,}61545$ e $Z_3 = 64{,}61545$, onde Z2 alcança 0,538462 do valor máximo da função, o mesmo ocorrendo para as demais funções, que sendo estas de minimização estas alcançam 0,461539 do valor máximo possível, considerando que a pertinência varia de 0 a 1, e que buscando a minimização teríamos: 1 - 0,461539 = 0,538462, ou seja um valor harmonioso. Nesta situação a sugestão é diferente do artigo de referencia que indica os pontos abaixo como solução (Tabela XVII)

Tabela XVII. valor das variáveis

x_1	x_2	x_3
4,61	9,23	6,16

Gerando os níveis de satisfação (de acordo com a modelagem proposta neste artigo) (Tabela XVIII):

Tabela XVIII. valor das funções

Z_1	0,34625
Z_2	0,91025
Z_3	0,131786

7.5 APLICAÇÃO EM CASO DE GERENCIA DE PESSOAL

As Forças Armadas de todos os países formam seus oficiais em um centro/academia específico(a) próprios. Para que estes futuros oficiais possam ingressar na academia, posteriormente ingressarem nas Forcas Armadas, eles precisam anteriormente terem concluído uma faculdade civil, assim como terem sido aprovados em um concurso para as vagas disponibilizadas pelas forças armadas.

O problema reside na oferta correta do número de vagas por função de modo a atender às necessidades existentes, assim como harmonizar o número de oficiais no futuro. Aspectos como reprovação, evasão, promoção são alguns dos pontos de vista importantes que devem ser considerados no problema.

O exemplo que se segue é baseado em um problema real.

Serão analisados apenas três Corpos (Engenheiros, Médicos e Dentistas).

Nj,k = necessidade de cada corpo e quadro para o ano k.	Ej,k = existente de cada corpo e quadro para o ano k.
Sj,k = Evasão de cada corpo e quadro para o ano k (dados históricos)	Aj,k = entrada em cada corpo e quadro para o ano k (vagas a serem abertas para o concurso).

J = Engenheiro (EN), Médicos (Md) e Dentista (Dn)
K = 1 a 5 (anos)
Nen = 500 ; Nmd = 1000 ; Ndn = 400
Sen = 10 ; Smd = 20 ; S = Dn = 15
Een = 400; Emd = 800 ; Edn = 300
Aj,k = Valores a serem definidos
Aj,k <= 125 (limite de alunos por ano)

$$\min = \sum_{k} \sum_{j=1}^{5} \sqrt{(Nj - Ej - Sj + Aj,k)^2}$$

A Tabela XIX Solução Considerando todos co Corpos com pesos iguais

Tabela XIX. solução por anos com pesos iguais

ANO1	ANO2	ANO3	ANO4	ANO5	
4	36	37	37	36	EN
113	47	46	47	47	MD
8	42	42	41	42	Dn

A Tabela XX apresenta a solução atribuindo peso 1 para Médicos (MD), peso 3 para Dentista (Dn) e peso 5 para Engenheiros (EM). Os pesos representam a importância que o decisor da alocação de vagas no concurso.

Tabela XX. solução com ponderação diferente de pesos

ANO1	ANO2	ANO3	ANO4	ANO5
68	21	20	20	21
12	71	73	72	72
45	33	32	33	32

Verifica-se assim a adequabilidade do modelo as aspirações do decisor, permitindo ao decisor priorizar quais vagas atender primeiro.

8. CONSIDERAÇÕES SOBRE O SOLVER PLUS V.3.5 E PLUS V.4.0, E CONCLUSÃO

Buscou-se também verificar qual a combinação de opções do Solver que obtinha melhores resultados, e após exaustivas combinações, conclui-se que o modo "Estimates Quadratic", com "Derivates Central" e "Search Newton" obteve a melhor resposta.

As combinações possíveis, para o Solver são constantes na Tabela XXI.

Tabela XXI. combinações possíveis do solver

Estimates	Derivates	Serch
Quadratic	Central	Newton
Quadratic	Central	Conjugate
Quadratic	Adiante	Newton
Quadratic	Adiante	Conjugate
Tangent	Central	Newton
Tangent	Central	Conjugate
Tangent	Adiante	Newton
Tangent	Adiante	Conjugate

A utilização do Solver com Excel permite a utilização dos recursos gráficos do Excel bem como o uso do Visual Basic Application (VBA). Não foi verificada diferença no tempo de processamento entre as duas versões do Solver (V.3.5 e V.4.0) quando usando a mesma combinação. A abordagem proposta tanto na versão original como na estendida mostrou-se ser simples de ser implementada e, acredita-se ser simples de ser entendida e utilizada. Além disso, a mesma é facilmente implementável no Solver Excel original ou nas versões Plus. Verificou-se com as comparações realizadas que se obtém "bons" resultado, quando comparado com os resultados dos algoritmos estudados, e a versão estendida permite ao decisor fazer uma exploração da fronteira de eficiência.

Salienta-se que o estudo é feito por métodos interativos, o que permite em várias situações ocorrem infinitas soluções não dominadas. Este artigo assim propõe uma forma prática de utilizar a implementação de métodos interativos em planilhas Excel com solver, facilitando assim o seu amplo uso no meio empresarial e acadêmico, sendo esta uma vantagem.

Pelas comparações verificou-se que esta implementação gera soluções tão boas quanto aos demais métodos, comparações apresentadas em 6.1 e 6.3 e uma opção diferente em 6.2 e 6.4; opção diferente no que tange ao resultado obtido pela soma do valor das FOs no ponto sugerido como solução; cabendo ao decisor fazer a escolha.

A lógica Fuzzy permite ao decisor uma maior interatividade e a busca de soluções ditas harmoniosas.

9. REFERÊNCIAS

(1) Alves, M. J. T. G., (2000). "Apoio À Decisão em Problemas de Programação Inteira e Inteira-Mista Multiobjetivo: Contribuições Metodológicas", Tese de Doutorado, Faculdade de Economia. Universidade de Coimbra.

(2) Almeida Filho, A. T. (2006). "Modelo de planejamento agregado multiobjetivo", Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco.

(3) Ayres , H. M. ; Queiroz , L. M. O. de ; Santos, L. C. B. dos ; Silva, R. C.; (2007) Algoritmo Evolutivo Para Problemas De Otimização Multiobjetivo Com Incertezas, XXXIX SBPO, Fortaleza, pag 1236 a 1247, Fortaleza.

(4) Bazaraa, M. S., Sherali, Hanif D., Shetty, C. M., (1993). "Nonlinear Programming, Theory and Algorithms", Second Edition, John Wiley & Sons, Inc.

(5) Buchanan, J., Gardiner, L. (2003). "A Comparation of Two Reference Point Methods In

Multiple Objective Mathematical Programming" EJOR, 149, 17-43.

(6) Chen, J; Lin, S. (2003). Na interactive neural network-based approach for solving multiple decision-making problems. Decision Support Systems 36 (2003), 137-146.

(7) Clímaco, J. N., Antunes, C. H., Alves, M. J. T. G (1987) TRIMAP – na interactive tricriteria linear programming package. Foundations of control Engeneering, v. 12, 101-119.

(8) Clímaco, J. N., Alves, M. J. T. G (2005) Aplicação De Uma Abordagem Interactiva Baseada Em Pontos De Referência A Um Problema Multiobjectivo De Localização transporte. ENGEVISTA,Vol.7, No. 1.

(9) Clímaco, J. N., Antunes, C. H., Alves, M. J. T. G (2002). Implementation of na user friendly software package – a guided tour of TRIMAP. Mathematical and Computer Modelling, v. 12, 1299-1309.

(10) Clímaco, J. N., Antunes, C. H., Alves, M. J. T. G, (2003). Programação Linear Multiobjetivo, Coimbra, Imprensa Universidade.

(11) Costa, J. P., Climaco J. N., (1998). Um Método de Programação Linear Multiobjetivo Baseado na Projecção dos Gradientes das Funções Objetivos, Investigação Operacional, vol. 18, num.

(12) Dias, L. C., Costa, J. P., Clímaco, J. N., (1996), "O Processamento Paralelo e o Apoio Multicritério à Decisão: Algumas Experiências Computacionais", Investigação Operacional, vol. 16, Dezembro, pp. 181-199.

(13) Ekel, P. Y.. (2002). Fuzzy sets and models of decision making. International Journal of Computers and Mathematics with Applications. 44, 863-875.

(14) Ekel, P. Y.; Galperi, E.A. (2003) Box-triangular multiobjective linear programs for resource allocation with apllication to load management and energy market problems, Mathematical and Computer Modelling, 37, 1-17

(15) Gomes, C. F. S.; Chaves, M. C. C. (2004) Aplicação da Programação por METAS e Método Lexicográfico ao Método STEM – nova proposta de algoritmo de formulação linear multiobjetivo. SBPO, 2004, São João Del Rei. XXXVI SBPO. p. 1033-1044.

(16) Gomes, C. F. S.; Chaves, M. C. C. (2005) Aplicação da Programação por Metas e Método Lexicográfico Ao Método STEM – Nova Proposta de Algoritmo de Formulação Linear Multiobjetivo. Investigación Operativa, Buenos Aires-Argentina, v. 25, n. Maio, p. 75-92.

(17) Gomes, C. F. S.; Chaves, M. C. C. (2006) Aplicação da lógica Nebulosa na formulação objetivo do método Apromls. XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. P.1146-1157 Goiânia.

(18) Gomes, L. F. A. M., Gomes, C. F. S., Almeida T., A., (2009). Tomada De Decisão Gerencial O Enfoque Multicritério, Editora Atlas, São Paulo, Terceira Edição. Brasil.

(19) Ignízio, J. (1985). Introduction to Linear Goal Programming. Beverly Hills: Sage.

(20) Knoblauch, V., (2000) Lexicographic orders and preference representation, Journal of Mathematical Economics 34.

(21) Korhonen, P., Wallenius, J.. (1988). A Pareto race. Naval research Logistics, v. 35, 615-623.

(22) Luque, M., Miettinen, K., Eskelinen, P., Ruiz, F.(2009), Incorporating preference information in interactive reference point methods for multiobjective optimization, Revista Omega, num. 37 pag. 450 – 462

(23) Noussair, C., Matheny, K. (2000) An Experimental study of decisions in dynamic optimisation problems, Economic Theory 15, page 389-419.

(24) Oliveira, R. M., Ferreira, A. V., (2003). Programação Geométrica Multiobjetivo: Uma Implementação Computacional Via Matlab, XXXV Sbpo, Natal, Pág, 2204-2216.

(25) Ragsdale, C. (2003) Spreadsheet Modeling and Decision Analysis: A Practical Introduction to Management Science. Educational Publishing Cambridge: Course technology 3 ed. South-Western.

(26) Romero, C. (2004). A General Structure of Achievement Function Model for a Goal Programming Model. *European Journal of Operational Research*, 153**:** 675-686.

(27) Roy, B., Bouysson, D., (1993), Aide Multiple A La Decision: Methods Et Cas, Editora Econômica, France.

(28) Shi, Y., (2001). Multiple Criteria and Multiple Constraint Levels Linear Programming, Concepts, Techniques & Applications, World Scientific. N.Y.

(29) Steuer, R. E., (1977), An Interactive Multiple Objective Linear Programming Procedure. TIMS Studies in Management Sciences, v. 6, 225-239.

(30) Steuer, R. E., (1986), Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation And Application. Wiley.

(31) Steuer, R. E., Gardiner, L. R., (1994), Unified Interactive Multiple Objective Programming, European Journal of Operational Research, Pp. 391-406.

(32) Sun, M., Stam, A., Stuer; R. E., (1996) Solving Multiple Objective Programming Problems using Feed-forward Artificial Neural Networks: The interactive FFANN Procedure, Management Science, Vo. 42, Number 6, June, 835-849.

(33) Sun, M., Stam, A., Stuer; R. E (2000). Interactive Multiple Objective Programming Using Tchebycheff Programs And Artificial Neural Networks, Computers & Operations Research, Number 27, Page 601-620.

(34) Zionts, S., Wallenius, J. (1976). An Interactive programming method for solving the multiple criteria problem. Managemnt Science, v. 22, 652-663.

(35) Zionts, S., Wallenius, J. (1983). An Interactive multiple objective linear programming method for a class of underlying nonlinear utility functions. Managemnt Science, v. 29, 519-529.