

# CONFIABILIDADE DE PLACAS FINAS DE AÇO SOB FLAMBAGEM

Neslei Nogueira Nogueira<sup>1</sup>  
Mauro de Vasconcellos Real<sup>2</sup>

**Resumo:** Neste trabalho foi realizada a análise não-linear da flambagem de placas finas de aço através do Método dos Elementos Finitos. As imperfeições geométricas que surgem no processo de fabricação das placas são modeladas através de um campo estocástico gaussiano usando o Método da Representação Espectral. A carga crítica de flambagem e a carga de ruptura de cada placa foram determinadas através do programa de elementos finitos ANSYS. Aplicando o Método de Monte Carlo analisou-se o efeito que variabilidade do campo estocástico das imperfeições geométricas e das variáveis aleatórias (módulo de elasticidade, tensão de escoamento e espessura) provocam na variação da carga de ruptura. Empregando-se o Método de Monte Carlo também foi realizado um estudo de Confiabilidade de placas finas sob flambagem. Primeiro o modelo de elementos finitos foi validado através da solução analítica de Paik et al. (2001), para o comportamento pós-flambagem de uma placa e da solução numérica de Kumar et al. (2007), para uma placa com um furo retangular. Em seguida, o efeito da variabilidade foi estudado para a situação em que o campo estocástico das imperfeições e as variáveis aleatórias atuam juntos. A análise da Confiabilidade baseou-se na relação entre a carga de ruptura e a carga crítica de flambagem da placa *Buckling Strength Ratio* (BSR). As principais conclusões obtidas são: que o efeito da variabilidade conjunta é significativo, quando o campo estocástico é considerado; que para a placa estudada se BSR é até 2,2 vezes a carga crítica, a confiabilidade é praticamente de 100%, e que quando a carga aplicada é superior a 3,8 vezes a carga crítica da placa, a confiabilidade é zero.

**Palavras-chave:** Flambagem, Confiabilidade, Campo estocástico, Imperfeições geométricas.

**Abstract:** In this paper, the nonlinear buckling analysis of thin steel plates using the finite element method was performed. The Method of Spectral Representation of the Stochastic Field was used to generate the geometric imperfections of the plate. The ANSYS finite element program was used to calculate the buckling critical load and the rupture load of the plate. The Monte Carlo method was applied to analyze the effect that the variability of the imperfections stochastic field and the random variables (modulus of elasticity, yield stress and thickness) have on the variation of the plate's rupture load. A reliability analysis of the plate was also carried out. First the finite element model was validated through the analytical solution of Paik et al. (2001), for the post-buckling behavior of a plate; and the numerical solution of Kumar et al. (2007), for a plate with a rectangular hole. After, the effect of variability was studied for the situation in which the imperfections stochastic field and the random variables are considered as varying together. The analysis of reliability was based on the relation *Buckling Strength Ratio* (BSR), between the plate's rupture load and its elastic buckling critical load. The main findings are: that the effect of the joint variability is significant and that for the plate analyzed here, when the value of BSR is equal to 2.2, the reliability is practically 100%, but when the value of BSR is higher than 3.8, the reliability vanishes.

**Keywords:** Buckling, Reliability, Stochastic Field, Geometric Imperfections.

<sup>1</sup> Escola de Engenharia – FURG, Rio Grande, RS, e-mail: nesleinogueira@yahoo.com.br.

<sup>2</sup> Escola de Engenharia – FURG, Rio Grande, RS, e-mail:mauroreal@furg.br.

## 1. INTRODUÇÃO

Placas finas de aço fazem parte da composição de muitas estruturas navais e oceânicas. O processo de fabricação dessas placas é complexo, sendo que durante esse procedimento surgem as imperfeições geométricas. Estas imperfeições geométricas influenciam na determinação da resistência de uma estrutura submetida à flambagem e, além disso, por serem de natureza aleatória necessitam da Teoria das Probabilidades, para se calcular a carga máxima que a estrutura suporta.



Figura 1. Imperfeições geométricas decorrentes do processo de soldagem (Amante, 2006)

Já há alguns anos que o fenômeno da flambagem de placas tem sido investigado, por meio de métodos analíticos, ensaios experimentais e recursos computacionais. A análise não-linear através do método dos elementos finitos é um excelente instrumento para a simulação numérica do comportamento de placas finas sob flambagem (Kumar et al., 2007).

As bases para a análise de placas sob flambagem podem ser encontradas nos livros de Timoshenko (1963) e de Chajes, (1974), que investigaram o problema e apresentaram as equações diferenciais para resolvê-lo, bem como os casos em que uma solução analítica é possível. Mais recentemente pode-se citar os trabalhos de Paik et al. (2001), que apresenta uma solução analítica para o problema, e o de Kumar et al. (2007), que mostra uma solução numérica através do Método dos Elementos Finitos para estas equações.

O trabalho de Raviprakash et al. (2010) foi usado como base para a análise da Confiabilidade. Estes autores desenvolvem um estudo sobre a capacidade de carga de estruturas compostas por placas finas sob compressão axial, a qual depende

em parte das imperfeições geométricas das placas. As imperfeições geométricas são produzidas por meio da combinação linear dos dez primeiros modos de flambagem da placa e são avaliadas através da análise não-linear do Método dos Elementos Finitos, usando o programa ANSYS (2005). A partir dessa análise é obtida a distribuição de probabilidade da carga de ruptura, usando o Método de Primeira Ordem e Segundo Momento (FOSM); e, a partir daí, é feita a análise da Confiabilidade (Ang e Tang, 1984).

O objetivo deste artigo é estudar a Confiabilidade de placas finas de aço sob flambagem, considerando as imperfeições geométricas e as variabilidades do módulo de elasticidade, da tensão de escoamento e da espessura. Para alcançar este objetivo, utilizou-se o Método dos Elementos Finitos, para calcular as cargas crítica e de ruptura das placas. O Método de Representação Espectral foi utilizado para representar o campo estocástico das imperfeições geométricas. O Método de Monte Carlo foi empregado para analisar a Confiabilidade e o efeito da variabilidade do campo estocástico e das variáveis aleatórias na carga de ruptura da placa.

## 2. METODOLOGIA

### 2.1 CÁLCULO DA CARGA DE RUPTURA POR FLAMBAGEM NÃO-LINEAR

As Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes descrevem o comportamento das placas. É possível que essas placas mesmo já tendo atingido a carga crítica continuem à resistir a força axial, sendo assim, conclui-se que a carga crítica não é a carga de ruptura. Por esse motivo, deve-se determinar a capacidade de carga pós-flambagem da placa. A Figura 2 mostra uma placa sob compressão axial antes do fenômeno da flambagem, já a Figura 3 mostra a mesma placa após esse fenômeno ter ocorrido. Nestas figuras, a placa encontra-se no plano  $xoy$ , sendo o eixo  $z$  perpendicular ao plano da placa.

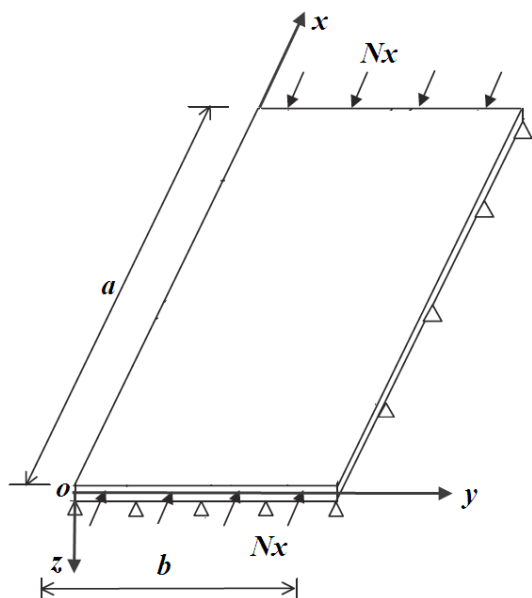


Figura 2. Placa sob compressão axial antes do fenômeno da flambagem

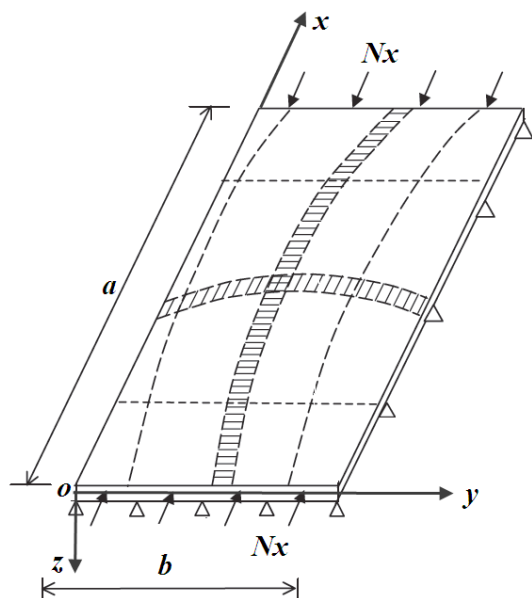


Figura 3. Placa sob compressão axial pós-flambagem

A Equação Diferencial Linear que rege a flambagem de placas é (Timoshenko, 1963):

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

onde,

$N_x$  e  $N_y$ : Forças de compressão biaxiais constantes

$N_{xy}$ : Força de cisalhamento constante no plano

$D$ : Deslocamento lateral na direção z

$D$ : Constante de rigidez de flexão da placa

Quando é possível encontrar uma função que satisfaça simultaneamente a Equação Diferencial e as condições de contorno, esta função é a solução analítica exata para o problema. No livro de Chajes (1974) encontra-se a solução analítica para a equação (1) na forma:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$   
 $n = 1, 2, 3, \dots$

onde,

$m$  e  $n$ : são o número de semi-ondas em que a placa flamba nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

$a$  e  $b$ : são o comprimento e a largura da placa, respectivamente.

A partir da equação (2), a solução analítica para a carga crítica de flambagem para uma placa simplesmente apoiada sob compressão uniaxial é dada por (Chajes, 1974):

$$N_{cr} = \frac{Da^2\pi^2}{m^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (3)$$

Contudo, o problema da flambagem de placas apresenta não-linearidades de origem física (material) e/ou geométrica (deformação) que impedem o estabelecimento de uma solução analítica exata.

Assim, uma forma deste problema ser resolvido é com a utilização de métodos numéricos, que permitem a obtenção de uma solução aproximada com boa precisão. Por essa razão, utilizou-se a análise não-linear do Método dos Elementos Finitos, usando o programa ANSYS (2005), para resolver o problema (Figuras 4 e 5).

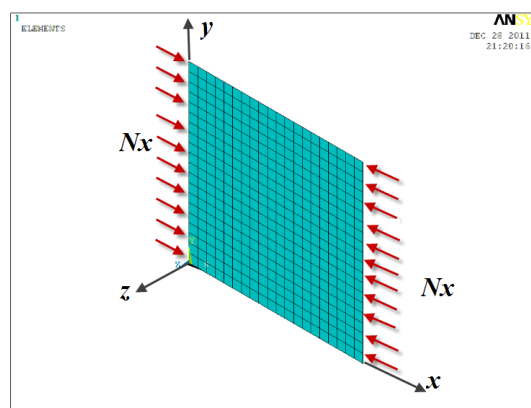


Figura 4. Placa analisada no programa ANSYS

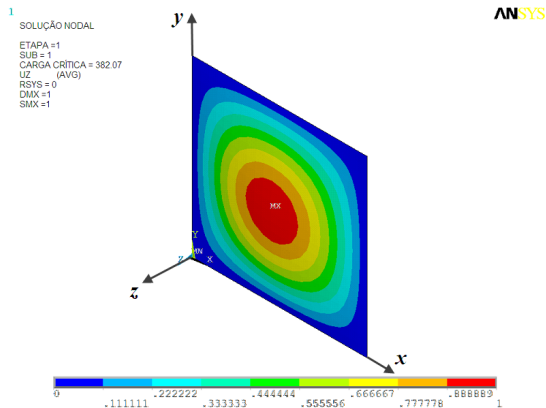


Figura 5. Flambagem da placa usando o ANSYS

## 2.2 CAMPO ESTOCÁSTICO DAS IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS: MÉTODO DA REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL

As imperfeições geométricas das placas surgem em decorrência do seu próprio processo de fabricação e de montagem. É por causa dessas distorções que as chances de falha por flambagem aumentam. A falha por flambagem ocorre por instabilidade estrutural quando é alcançada uma carga crítica em compressão axial.

Para dar prosseguimento a análise da flambagem não-linear de placas, é preciso simular a existência de imperfeições geométricas, e o Método de Representação Espectral será usado para essa finalidade.

O Método da Representação Espectral, conforme apresentado por Shinozuka e Deodatis (1996), consiste em utilizar uma série de cossenos para produzir as funções de amostra do campo estocástico. As bases para gerar as funções de amostra são: a função de autocorrelação do conjunto e a função de densidade espectral de potência.

Para definir essas funções, é necessário conhecer alguns parâmetros:

$\sigma$ : é o desvio padrão do campo estocástico

$b_1$  e  $b_2$ : são parâmetros proporcionais à distância de correlação do campo estocástico ao longo das direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

$\xi_1$  e  $\xi_2$ : são, respectivamente, as distâncias entre dois pontos, segundo as direções  $x$  e  $y$ .

A função de autocorrelação do conjunto é definida como:

$$R_{f_0 f_0}(\xi_1, \xi_2) = \sigma^2 \exp \left[ - \left( \frac{\xi_1}{b_1} \right)^2 - \left( \frac{\xi_2}{b_2} \right)^2 \right] \quad (4)$$

cujo gráfico é apresentado na Figura 6.

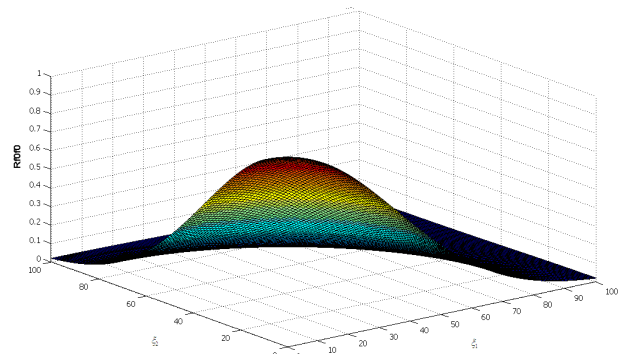


Figura 6. Função de autocorrelação do conjunto

A função de densidade espectral de potência é definida como:

$$S_{f_0 f_0}(\kappa_1, \kappa_2) = \sigma^2 \frac{b_1 b_2}{4\pi} \exp \left[ - \left( \frac{b_1 \kappa_1}{2} \right)^2 - \left( \frac{b_2 \kappa_2}{2} \right)^2 \right] \quad (5)$$

cujo gráfico é apresentado na Figura 7.

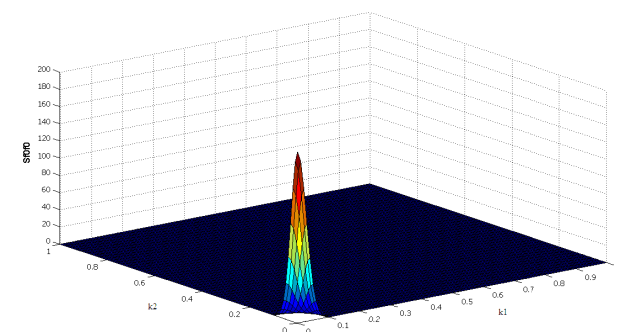


Figura 7. Função de densidade espectral de potência

Estas funções refletem com precisão as características probabilísticas do campo estocástico quando o número de termos da série de cossenos é grande.

Um campo estocástico gaussiano, bidimensional e homogêneo  $f_0(x, y)$ , com média igual a zero e funções de autocorrelação  $R_{f_0 f_0}(\xi_1, \xi_2)$ , do tipo quadrante, pode ser simulado pelas seguintes séries, quando  $N_1$  e  $N_2$  tendem ao infinito simultaneamente, (Shinozuka e Deodatis, 1996).

$$f(x, y) = \sqrt{2} \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} A_{n_1 n_2} \begin{bmatrix} \cos(k_{n_1} x + k_{n_2} y + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)}) \\ \cos(k_{n_1} x - k_{n_2} y + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde



$$A_{n1n2} = \sqrt{2S_{f0f0}(\kappa_{1n1}, \kappa_{2n2})\Delta\kappa_1\Delta\kappa_2} \quad (7)$$

sendo

$$k_{1n1} = n1\Delta\kappa_1 \text{ e } k_{2n2} = n2\Delta\kappa_2$$

As variáveis  $\Phi_{n1n2}^{(1)}$  e  $\Phi_{n1n2}^{(2)}$  representam dois conjuntos independentes de ângulos de fase randômicos, distribuídos uniformemente no intervalo de 0 a  $2\pi$ .

A Figura 8 mostra um gráfico de superfície de imperfeições geométricas gerado através do Método da Representação Espectral.

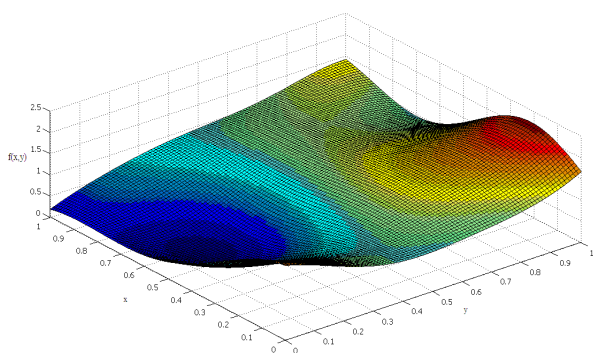


Figura 8, Função campo estocástico

A principal aplicação desse método é encontrar a solução de problemas estocásticos através do Método de Monte Carlo.

### 2.3 O MÉTODO DE MONTE CARLO

O Método de Monte Carlo é usado em simulações estocásticas e tem sido aplicado como forma de obter aproximações numéricas de funções complexas. O princípio desse método é desenvolver um modelo numérico, baseado em um programa de computador, capaz de reproduzir o comportamento do sistema. A análise do sistema é realizada várias vezes, e cada uma delas é baseada em um conjunto de parâmetros de entrada do sistema, obtidos de forma aleatória, de acordo com as distribuições de probabilidade que lhes foram atribuídas. Como resultado, diversas previsões de comportamento do sistema são obtidas. A partir desse momento, são empregados métodos estatísticos para determinar os momentos e os tipos de distribuição de probabilidade das variáveis da

resposta, que representam o comportamento do sistema.

As etapas necessárias para a aplicação do Método de Monte Carlo são (Ayyub e MCCuen, 1995):

1. Definição do sistema;
2. Geração das variáveis aleatórias de entrada do sistema;
3. Realização da análise do sistema através do modelo matemático elaborado;
4. Análise estatística da resposta obtida;
5. Estudo da eficiência e da convergência do método.

Neste artigo os sistemas em análise são placas finas de aço utilizadas na construção naval submetidas à flambagem.

Os parâmetros de entrada são: o campo de imperfeições geométricas, as variáveis aleatórias (módulo de elasticidade, tensão de escoamento e a espessura), as condições de contorno e as propriedades dos materiais, os quais vamos utilizar no estudo de placas finas de aço sob flambagem.

O modelo utilizado para representar o comportamento de placas finas de aço sob flambagem consiste na aplicação do método dos elementos finitos, na análise não-linear de estruturas laminares de aço (placas e cascas), através do programa de elementos finitos ANSYS (2005).

O principal parâmetro da resposta da estrutura é a carga máxima que a placa pode suportar após a flambagem. Após a aplicação do Método de Monte Carlo, os parâmetros de resposta podem ser tratados como variáveis aleatórias.

### 2.4 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE

Definindo-se a variável aleatória Margem de Segurança  $M$ , conforme (Ang e Tang, 1984), como sendo a diferença entre a Resistência  $R$  da estrutura e a Ação  $S$ , à qual a estrutura é submetida, ou seja,

$$M = R - S \quad (8)$$

uma vez fixada as distribuições de  $R$  e de  $S$ , é possível determinar-se a distribuição da variável  $M$ .

Se a distribuição de probabilidade de  $R$  for Normal e a distribuição de probabilidade de  $S$

também for Normal, tem-se que o valor esperado da Margem de Segurança  $\mu_M$ , será dado por:

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (9)$$

e que o desvio padrão da Margem  $\sigma_M$  será obtido a partir da expressão, se as variáveis  $R$  e  $S$  forem independentes:

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (10)$$

É possível ainda definir-se uma variável normal reduzida para a Margem de Segurança, com média zero e desvio padrão unitário através da equação:

$$m = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (11)$$

O início da região de falha ou ruptura dá-se quando  $M = 0$ , ou seja, para uma variável normal reduzida Margem de Segurança  $m$  igual a:

$$m = -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \quad (12)$$

A distância deste ponto até o valor médio de  $m$ , ou seja,  $m = 0$ , tomada em valor absoluto, é um indicativo do grau de segurança contra a falha ou ruína da estrutura e é designada por Índice de Confiabilidade  $\beta$ , dado por:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} \quad (13)$$

A partir da Figura 9, observa-se que a Probabilidade de Falha para uma estrutura, que possua uma variável reduzida Margem de Segurança de distribuição normal, será calculada através da equação:

$$P_f = F_m(-\beta) \quad (14)$$

onde  $F_m$  é a função distribuição normal de probabilidade acumulada da variável  $m$ .

Conclui-se, então, que quanto maior for o Índice de Confiabilidade de uma estrutura em relação a um certo Estado Limite, menor será a sua probabilidade de Falha em relação a este Estado Limite. Este parâmetro é útil, então, para se poder comparar o nível de segurança atingido no projeto de diversas estruturas com relação a um determinado Estado Limite.

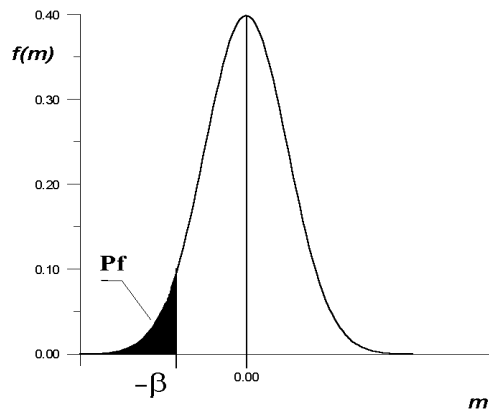


Figura 9. Variável normal reduzida Margem de Segurança e Índice de Confiabilidade

### 3. RESULTADOS

#### 3.1 VALIDAÇÃO DO MODELO

A validação do modelo de elementos finitos consiste em comparar os resultados obtidos pelo programa ANSYS, com a solução analítica de Paik et al. (2001) para o problema do comportamento pós-flambagem de placas finas e com os resultados numéricos de Kumar et.al. (2007).

##### 3.1.1 Análise elástica não-linear geométrica de placas

O objetivo deste exemplo é verificar a capacidade do modelo de representar um problema com não-linearidade geométrica apenas, sendo o material considerado como elástico linear.

Para realizar essa tarefa fizeram-se algumas considerações, tais como: uma placa quadrada de dimensões  $500mm \times 500mm$ , espessura ( $t$ ) de  $3,2mm$ , tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) de  $264,6 N/mm^2$ , módulo de elasticidade ( $E$ ) de  $2,058 \cdot 10^5 N/mm^2$ , coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,3 e que o tamanho do elemento seja de  $25mm \times 25mm$ , para este exemplo, conforme mostrado na Figura 10.

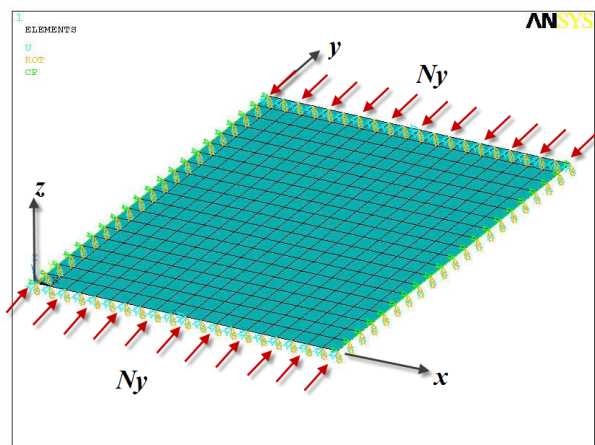


Figura 10. Placa quadrada analisada por Paik et al. (2001) e por Kumar (2007).

Além disso, no programa ANSYS deve-se considerar:

1. O tipo de elemento é o Shell 181 com 4 nós;
2. O elemento tem seis graus de liberdade por cada nó, 3 translações ( $U_x, U_y$  e  $U_z$ ), 3 rotações ( $R_x, R_y$  e  $R_z$ );
3. Condições de contorno simplesmente apoiadas ao longo de todas as bordas da placa são usadas na análise. Todos os nós ao longo das quatro bordas da placa são restringidos para deflexão e rotação ao longo da direção de espessura ( $U_z, R_z = 0$ );
4. A borda reativa é fixada contra a deformação axial ( $U_y = 0$ ). No bordo oposto é aplicado um deslocamento imposto  $U_y$  de forma incremental. Todos os nós ao longo das bordas descarregadas são acoplados para o deslocamento ( $U_x$ ) tal que os deslocamentos ao longo do comprimento da placa são uniformes;
5. As não-linearidades de origem física (material) e geométrica (deformações) são consideradas na análise.

Ao observar-se a Figura 11 nota-se, através da curva de tensão-deflexão, que os resultados obtidos por Kumar et al. (2007) são semelhantes à solução analítica de Paik et al. (2001).

Com o objetivo de comprovar o modelo na Figura 12 é apresentado o gráfico da solução encontrada com o modelo do presente trabalho.

Se compararmos a solução analítica de Paik et al. (2001), com as soluções do artigo de Kumar et al. (2007) e a deste trabalho, verifica-se que os resultados são semelhantes.

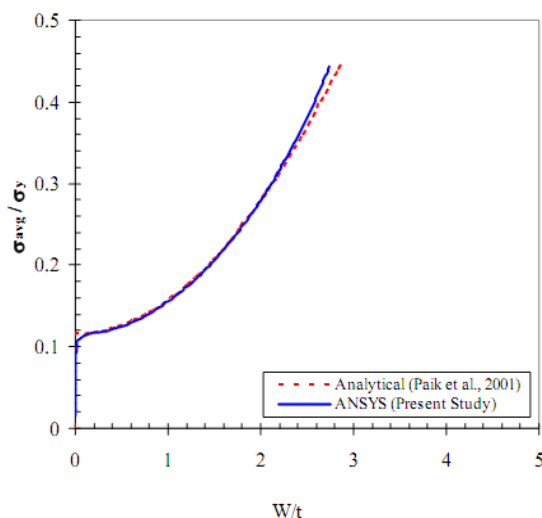


Figura 11. Curvas tensão-deflexão normalizadas sob compressão axial (KUMAR et al., 2007)

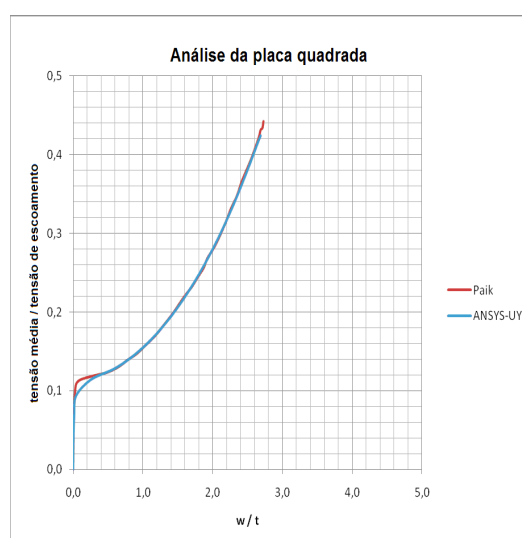


Figura 12. Curvas tensão-deflexão normalizadas sob compressão axial obtidas neste trabalho e por Paik et al. (2001)

### 3.1.2 Análise elasto-plástica de placas

Para analisar o comportamento pós-flambagem de placas finas até atingir a carga de ruptura, foram analisadas placas com furos retangulares sob compressão uniaxial, conforme Kumar et al. (2007).

A placa que será considerada é a denominada P5, que possui dimensões  $500\text{mm} \times 500\text{mm}$  e uma abertura retangular em seu centro de  $250\text{mm} \times 100\text{mm}$ , cuja relação área do furo sobre a área da placa é de 0,10, e sua espessura é de  $5\text{mm}$ . A malha de elementos finitos é apresentada na Figura 13, sendo que cada elemento finito é quadrado e possui  $25\text{mm}$  de lado.

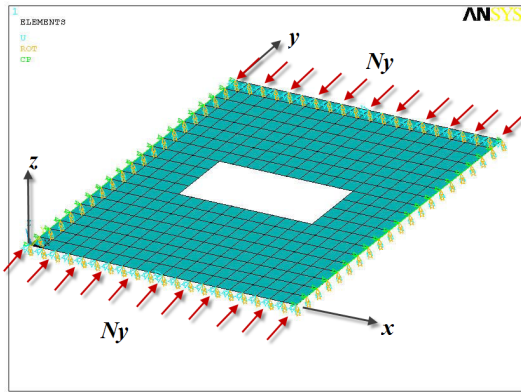


Figura 13. Placa quadrada com furo retangular analisada por Kumar (2007).

A tensão de escoamento considerada é de  $250\text{ N/mm}^2$ , o módulo de elasticidade é igual a  $200\text{ GPa}$  e o coeficiente de Poisson é igual a  $0,3$ . O material foi considerado como elasto-plástico perfeito, sendo que o critério de plastificação empregado foi o de von Mises.

Uma comparação entre os resultados de Kumar et al. (2007) e aqueles obtidos neste trabalho pode ser feita através da Figura 14.



Figura 14. Curvas carga-deslocamento axial para placa com furo retangular

A carga última obtida por Kumar et al. (2007) foi de  $277,05\text{ kN}$ , enquanto que neste trabalho foi obtido um valor  $278,38\text{ kN}$ . Estes dados mostram uma boa concordância dos resultados não só em termos de curva carga-deslocamento, como também para a carga última da placa.

### 3.1.3 Teste de convergência de malha

Um estudo de convergência de malha foi realizado para obter um elemento de tamanho ideal para a análise não-linear de placas quadradas sem furos.

A placa analisada tem as seguintes características:

1. Dimensões da placa  $1000\text{ mm} \times 1000\text{ mm}$ ;
2. Espessura  $t = 8,0\text{ mm}$ ;
3. Módulo de elasticidade  $E = 205,8\text{ MPa}$ ;
4. Tensão de escoamento  $f_y = 313,6\text{ MPa}$ .

As malhas consideradas são: grossa ( $5 \times 5$ ), média ( $10 \times 10$ ), fina ( $20 \times 20$ ) e muito fina ( $40 \times 40$ ).

Na Tabela 1 se encontram, para cada tipo de malha, o tamanho do lado do elemento ( $L$ ), o número de elementos da malha ( $NElem$ ), os valores obtidos para a carga última ( $P_u$ ) e a diferença percentual entre as malhas sucessivas ( $\Delta\%$ ).

Tabela 1. Teste de convergência de malha

Malha	$L$ (mm)	$NElem$	$P_u$ (kN)	$\Delta\%$
Grossa	200	25	1144,51	-
Média	100	100	1014,5	-11,36
Fina	50	400	973,72	-4,02
Muito fina	25	1600	961,83	-1,22

Os resultados indicam uma convergência satisfatória para malha fina com base na carga final. Então, um elemento de tamanho  $50\text{ mm}$  será usado para a discretização da placa.

É necessário observar que a malha fina foi utilizada porque o método de Monte Carlo exige um tempo computacional muito grande, então é preciso adotar uma solução de compromisso entre a precisão dos resultados e o tempo de processamento necessário para atingi-lo. No caso, a variação em torno de  $1\%$  nos resultados é perfeitamente aceitável em termos de Engenharia.

### 3.2 EFEITO DA VARIABILIDADE DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

O efeito da variabilidade das variáveis aleatórias (módulo de elasticidade, tensão de escoamento e espessura) foi estudado considerando-se uma placa de aço quadrada com lado  $l = 1000\text{ mm}$ , módulo de elasticidade  $E = 205,8\text{ GPa}$ , tensão de escoamento  $\sigma_y = 313,6\text{ Pa}$  e espessura  $t = 8\text{ mm}$ .

Como a relação entre a espessura  $t$  e o lado  $l$  é  $t/l = 0,008$ , a placa pode ser classificada como



placa fina (Teoria de Kirchhoff), para fins de análise estrutural (Timoshenko, 1963; Chajes, 1974), embora a indústria siderúrgica considere como finas apenas as chapas com espessura até 6,4 mm.

O material foi considerado como elasto-plástico perfeito e obedecendo ao critério de plastificação de von Mises.

Para analisar o efeito da variabilidade do módulo de elasticidade e da tensão de escoamento foram levadas em conta três coeficientes de variação: 5%, 10% e 15%. A distribuição normal foi usada para avaliar o efeito da variabilidade do módulo de elasticidade, já a avaliação do efeito da variabilidade da tensão de escoamento deu-se através da distribuição lognormal. Em relação ao efeito da variabilidade da espessura, os coeficientes de variação considerados foram: 2,5% e 5%, e a distribuição usada foi a lognormal.

Para verificar qual o grau de variação que influenciou mais na alteração dos valores da carga de ruptura, calculou-se o coeficiente de variação da carga de ruptura para cada situação, realizando 1.000 simulações de Monte Carlo, empregando o programa ANSYS. Os resultados podem ser vistos nas Tabelas 2 e 3.

**Tabela 2. Coeficiente de Variação das cargas de ruptura**

Variáveis aleatórias Coef. de variação:	Coeficiente de variação das cargas de ruptura (%)		
	5%	10%	15%
$E$	1,95	3,90	5,94
$\sigma_y$	3,09	6,15	9,70

**Tabela 3. Coeficiente de Variação das cargas de ruptura para a espessura**

Coefficiente de variação da espessura	Coefficiente de Variação das cargas de ruptura (%)
2,5%	5,87
5%	7,47

Ao observar-se a Tabela 2 nota-se que o efeito da variabilidade do módulo de elasticidade e da tensão de escoamento é maior quando as variáveis aleatórias variam 15%, pois o coeficiente de variação da carga de ruptura cresce quase que

linearmente com o coeficiente de variação destas variáveis aleatórias.

A partir da Tabela 3, pode-se observar que a variabilidade da carga de ruptura cresce com a variabilidade da espessura da placa. Porém, neste caso, o crescimento é menor que para o módulo de elasticidade e para a tensão de escoamento do material.

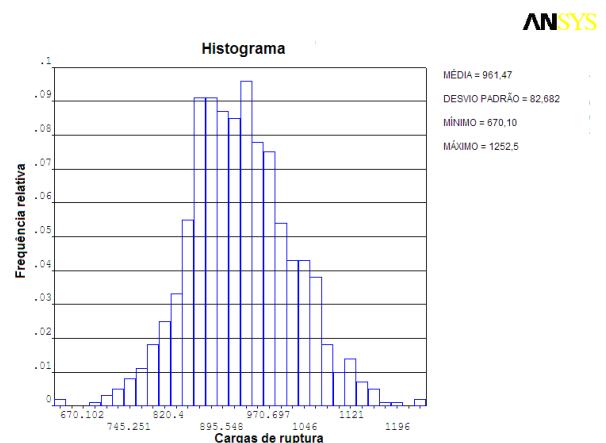
### 3.3. VARIAÇÃO CONJUNTA DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DO CAMPO ESTOCÁSTICO

Neste item, será feito um estudo quando as variáveis aleatórias: módulo de elasticidade ( $E$ ), tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) e espessura ( $t$ ) apresentam coeficientes de variação respectivamente iguais a 10%, 10% e 2,5%. Os tipos de distribuição considerados para cada variável aleatória são análogos aos do item 3.2.

Os dois casos analisados foram:

1. Quando faz parte da variação o módulo de elasticidade, tensão de escoamento e a espessura;
2. Quando faz parte da variação o módulo de elasticidade, tensão de escoamento, espessura e o campo estocástico das imperfeições geométricas iniciais.

Para fazer a análise da variabilidade, pode-se usar histograma dos valores da amostra obtido através de 1.000 simulações realizadas no software ANSYS, conforme a Figura 15.



**Figura 15. Histograma da carga de ruptura para variação conjunta do campo estocástico e das variáveis aleatórias**

Quando somente as variação das variáveis aleatórias básicas é considerada, o coeficiente de variação da carga de ruptura foi igual a 7,83%, en-

quanto que quando o campo estocástico das imperfeições geométricas é incluído nas simulações o COV da carga de ruptura sobe para 8,60%. Isto mostra que as imperfeições geométricas influenciam na variabilidade da carga de ruptura da placa.

### 3.4. CONFIABILIDADE

Com base nos resultados precedentes, foi elaborado um estudo da confiabilidade da placa modelo em relação ao estado limite último de ruptura, considerando-se a relação entre a carga externa de compressão aplicada sobre a placa e a carga crítica de flambagem da mesma. Neste item, apenas a variabilidade do campo estocástico de imperfeições geométricas foi levada em conta.

Para esse estudo foram feitas as seguintes considerações: uma placa quadrada com lado igual a 1m, espessura de 8mm, coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,3, módulo de elasticidade ( $E$ ) de 205,8GPa e tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) de 313,6MPa. Além disso, deve-se manter o desvio padrão das imperfeições geométricas de todos os modelos de tolerância de fabricação igual 1,711mm, conforme Raviprakash et al. (2010).

As condições de contorno de apoio simples são aplicadas em todas as bordas da placa. Uma das laterais é fixada para o deslocamento  $U_y$  e na lateral oposta é aplicado um deslocamento imposto incremental  $U_y$  até a placa atingir a ruptura, conforme a Figura 16. Também foi utilizado nesta análise um elemento do tipo SHELL 181 com 4 nós, do programa ANSYS (2005).

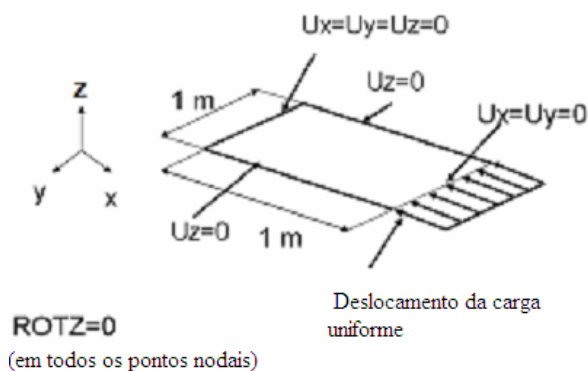


Figura 16. Condições de contorno para a placa analisada (Raviprakash et al., 2010).

A carga crítica da placa foi calculada através do método dos elementos finitos com o programa ANSYS, obtendo-se o valor de 382,07kN. O valor determinado a partir da solução analítica de Timoshenko foi de 380,94kN, enquanto que aquela obtida numericamente por Raviprakash et

al. (2010) foi de 378,12kN. O erro percentual de Raviprakash et al. foi de 0,74%, enquanto que o deste artigo foi de 0,30%.

Em seu artigo, Raviprakash et al. (2010) usam um método que consiste na combinação linear dos dez primeiros modos de flambagem para analisar a influência das imperfeições geométricas, já o método que está sendo proposto nesse trabalho é realizar tal análise pelo método da representação espectral do campo estocástico das imperfeições geométricas.

Para verificar qual o efeito da variabilidade do campo estocástico das imperfeições geométricas na confiabilidade, foram feitas simulações no programa ANSYS, considerando as distâncias de correlação na direção x ( $b_1$ ) e na direção y ( $b_2$ ) iguais a 500m.

Para a análise da confiabilidade será calculada a razão *Buckling Strength Ratio* (BSR), sendo BSR é definida como:

$$BSR = \frac{P_u}{P_{cr}} \quad (15)$$

onde,

$P_u$ : sendo o último valor obtido na simulação para a carga.

$P_{cr}$ : o valor da carga crítica de flambagem elástica da placa, cujo o valor é de 382,07kN.

No artigo de Raviprakash et al. (2010), a análise da confiabilidade é realizada através do método *Mean Value First Order Second Moment* (MVFOSM) e de acordo com ele, o índice de confiabilidade  $\beta$  é definido como:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (16)$$

onde,

$\mu_R$ : média da força resistente

$\mu_S$ : média da carga aplicada

$\sigma_R$ : desvio padrão da força resistente

$\sigma_S$ : desvio padrão de carga aplicada

$\beta$ : índice de confiabilidade

A probabilidade de falha é calculada através da equação (14). Então, a confiabilidade da estrutura é dada como,

$$C = 1 - P_f \quad (17)$$

Neste caso, a carga aplicada é assumida como um único valor determinístico, Assim,  $\sigma_S = 0$  e agora é  $\beta$ , é definido como

$$\beta = \frac{\mu_R - CARGA(BSR)}{\sigma_R} \quad (18)$$

Através da variação da carga aplicada, a confiabilidade da estrutura em cada situação é obtida. A seguir será calculado o índice de confiabilidade  $\beta$  com o objetivo de fazer a análise da confiabilidade, considerando-se as propriedades físicas e geométricas da placa modelo e o campo de imperfeições geométricas.

As figuras abaixo mostram os gráficos da probabilidade de falha para cargas externas de compressão iguais a 2,40; 2,50 e 2,60 vezes a primeira carga crítica de flambagem da placa, respectivamente, considerando-se  $b_1 = b_2 = 500m$ .

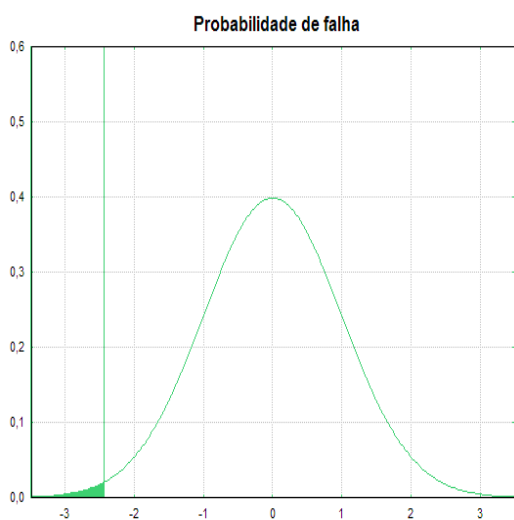


Figura 17. Probabilidade de falha para  $P = 2,4P_{cr}$

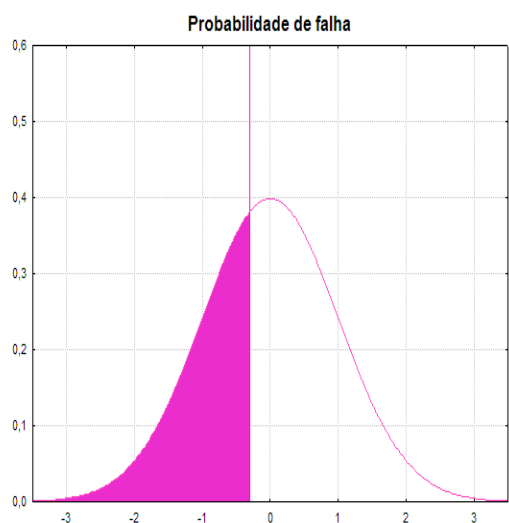


Figura 18. Probabilidade de falha para  $P = 2,5P_{cr}$

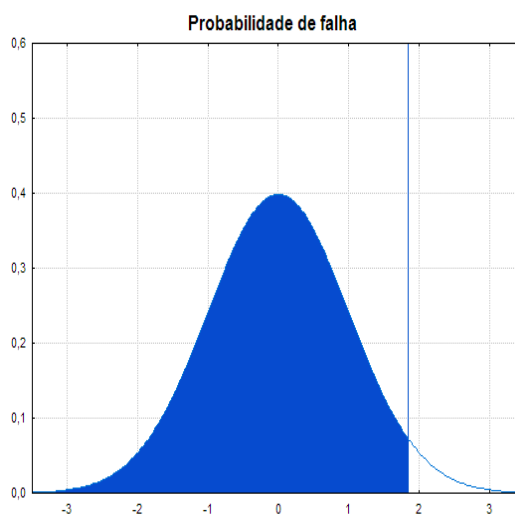


Figura 19. Probabilidade de falha para  $P = 2,6P_{cr}$

Para o caso visto na Figura 17 a probabilidade de falha é de aproximadamente 0,74%, Já na Figura 18 é de 38,32%, enquanto que na Figura 19 é de 96,73%.

A variação da confiabilidade em relação ao BSR é mostrada na Figura 20. A partir da curva de confiabilidade, pode ser observado que para a placa tomada para o estudo, se BSR é até 2,2 vezes a carga crítica, a confiabilidade é praticamente de 100%, e quando a carga aplicada é superior a 3,8 a carga crítica da placa, a confiabilidade é zero.

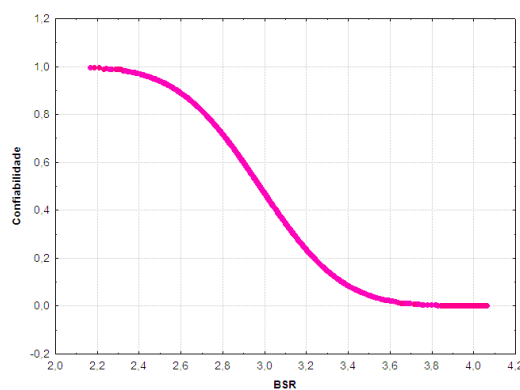


Figura 20. Variação da confiabilidade em relação ao BSR para  $b_1$  e  $b_2 = 500$  mm

#### 4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

Para a validação do modelo a Figura 12 é bastante conclusiva, pois ao observar a figura vê-se que os resultados obtidos por (Paik et al., 2001), e a solução encontrada durante o desenvolvimento desse trabalho são semelhantes. Já a Figura 14 que refere-se a placa P5 do artigo de (Kumar et

al., 2007), compara os valores encontrados para a carga axial são praticamente iguais, visto que a diferença percentual entre eles é de apenas 0,48%.

Em relação a variabilidade do módulo de elasticidade, a distribuição é normal, considerando os casos citados no item 3.2, nota-se que ao calcular o coeficiente de variação da carga de ruptura, esse aumenta na medida em que o coeficiente de variação do módulo de elasticidade cresce.

Para a tensão de escoamento, o efeito da variabilidade foi estudado para a distribuição Lognormal. O coeficiente de variação da carga de ruptura

cresce de forma aproximadamente linear com o coeficiente de variação da tensão de escoamento.

Na análise do efeito da variabilidade da espessura, para a distribuição Lognormal, são vistas duas situações: 2,5% e 5%. O coeficiente de variação é maior para 5%, onde se pode dizer que o aumento do coeficiente de variação da espessura faz com que haja um pequeno aumento no coeficiente de variação da carga de ruptura.

A Tabela 4 mostra as variabilidades e os coeficientes de variação, das variáveis que influenciam na variação da carga de ruptura.

**Tabela 4. Influência do efeito da variabilidade das variáveis aleatórias na carga de ruptura da placa**

Variabilidades	Coeficientes de variação (%)
Campo estocástico	2,18
Módulo de elasticidade ( $E$ )	5,94
Tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	9,07
Espessura ( $t$ )	7,47
Variação conjunta (módulo de elasticidade ( $E$ ), tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) e espessura ( $t$ ))	8,60

Através da tabela acima é possível verificar que a variabilidade da tensão de escoamento tem maior influência sobre a variação da carga de ruptura.

A determinação da carga crítica foi calculada e a comparada com a solução analítica e com a de Raviprakash et al. (2010). Observa-se que a solução obtida no presente trabalho é mais próxima da solução analítica.

O índice de confiabilidade  $\beta$ , a probabilidade de falha e a confiabilidade são de extrema importância para a análise da segurança alcançada no projeto de placas. Estas grandezas foram calculadas para cada valor proposto de  $b_1$  e  $b_2$ , os gráficos das probabilidades de falha são vistos a partir da Figura 17 até a Figura 19. Nestes gráficos vê-se que as probabilidades de falha crescem a medida que o valor da carga aplicada (BSR) au-

menta, conseqüentemente as confiabilidades diminuem enquanto os valores de BSR aumentam, pois a probabilidade está diretamente relacionada com carga máxima que a placa suporta. Um gráfico que exemplifica essa idéia é visto na Figura 19.

Esta metodologia deve ser aplicada a placas com outras configurações geométricas e feitas com outros tipos de aço, para que se possa obter dados mais conclusivos sobre a confiabilidade alcançada no projeto de placas finas sob compressão uniaxial, sujeitas à flambagem não-linear.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AMANTE, D. A. M. *Imperfeições de fabricação na construção naval e offshore*. Rio de Janeiro, 2006. 7 p. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Naval, UFRJ.



2. ANG, A. H-S, TANG, W. H. *Probability concepts in engineering planning and design Volume 1: basic principles*. New York: John Wiley & Sons 1984.
3. ANSYS user's manual (version 10.0). Houston: Swanson Analysis System Inc.; 2005.
4. AYYUB, B.M., MCCUEN, R.H.. *Simulation-based reliability methods*. Em: SUNDARARAJAN, C. *Probabilistic structural mechanics handbook; theory and industrial applications*. New York: Chapman & Hall. 1995. Cap 4, p.53-69.
5. CHAJES, A. *Principles of structural stability theory*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1974. 336 p.
6. KUMAR, M.S., ALAGUSUNDARAMOORTHY, P., SUNDARAVADIVELU, R.. *Ultimate strength of square plate with rectangular opening under axial compression*. *Journal Naval architecture and Marine Engineering*. v. 4, n. 1, p. 15-26, 2007.
7. PAIK, J. K., THAYAMBALI, A. K., KIM, B. J.. *Advanced ultimate strength formulations for ship plating under combined biaxial compression/tension, edge shear, and lateral pressure loads*. *Marine Technology*. v. 2, n. 2, p. 153-164, 2001.
8. RAVIPRAKASH, A. V., ADHITHYA, A. P. B., PRABU, B., ALAGUMURTHI, N.. *Structural reliability of thin plates with random geometrical imperfections subjected to uniform axial compression*. *Jorrdan Journal of Mechanical and Industrial Engineering*. v. 4, n. 2, p. 270-279, 2010.
9. SHINOZUKA, M., DEODATIS, G.. *Simulation of multi-dimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation*. *Journal applied Mechanics Reviews*. v. 49, n. 1, 1996.
10. TIMOSHENKO, S. P. *Theory of elastic stability*. Singapore: Mcgraw-Hill, 1963. 541 p.