



Estudo da não linearidade geométrica, instabilidade e ruptura de estruturas espaciais reticuladas

Study of geometric non-linearity, instability and rupture of space frames structures

Evandro Paulo Foletto¹

Roberto Carlos Pavan²

Silvio Edmundo Pilz³

Marcelo Fabiano Costella⁴

Resumo: Neste trabalho foi desenvolvido um programa computacional, em ambiente MATLAB, para análise de pórticos espaciais, utilizando o método da rigidez, bem como uma metodologia para consideração dos efeitos de segunda ordem decorrentes da interação axial-flexão (não linearidade geométrica) e instabilidade elástica. Também foi adicionado ao código um critério de ruptura para os membros. Através dos resultados obtidos foi possível constatar que, na maioria dos casos, houve aumento dos deslocamentos e esforços na estrutura decorrentes da não linearidade geométrica, bem como, a maioria dos membros atingiram a ruptura com um nível de carregamento menor quando comparado com a análise linear.

Palavras-chave: Não linearidade geométrica; Matlab; Critério de ruptura.

¹ UNOESC – Universidade do Oeste de Santa Catarina

² UFFS – Universidade Federal da Fronteira Sul

³ UNOCHAPECÓ – Universidade Comunitária da Região de Chapecó

⁴ UNOCHAPECÓ – Universidade Comunitária da Região de Chapecó

Abstract: In this work a computer program was developed, in a MATLAB environment, for the analysis of space frames using the stiffness method, as well as a methodology for considering the second order effects resulting from the axial-flexion interaction (geometric non-linearity) and elastic instability. Also added to the code was a rupture criterion for bars. Through the obtained results it was possible to verify that, in the majority of the cases, there was an increase of the displacements and efforts in the structure due to the geometric nonlinearity, as well as, the majority of the members reached the rupture with a lower loading level when compared with the linear analysis.

Keywords: Geometric non-linearity; Matlab; Rupture criterion.

1. Introdução

Na análise linear elástica o material é assumido não ter alcançado as tensões de escoamento e suas propriedades permanecem invariáveis, bem como, as equações de equilíbrio são formuladas com base na geometria indeformada da estrutura. As deformações subsequentes são consideradas pequenas de modo a não alterar significativamente o equilíbrio e o comportamento da estrutura. Em razão disto pode-se tratar de forma desacoplada os esforços internos da estrutura quando da montagem das equações de rigidez.

Na não linearidade geométrica o material continua sendo tratado como elástico, mas incluem-se os efeitos das deformações e deslocamentos na formulação das equações de equilíbrio. Já a não linearidade do material considera as mudanças das propriedades físicas do material resultante da ação das forças e, nestes casos, a consideração dos esforços internos de forma independente não pode ser feita.

Por definição, uma análise elástica linear, de primeira ordem, exclui a consideração da não linearidade. Na análise elástica de segunda ordem os efeitos das deformações e deslocamentos são incluídos na formulação das equações de equilíbrio.

Este artigo aborda o fenômeno da instabilidade e da não linearidade geométrica decorrente da interação axial-flexão. A instabilidade se caracteriza por acontecer de forma repentina e cujas consequências podem ser desastrosas e tem como característica o fato de que as ações que provocam este tipo de fenômeno não são necessariamente ações que sofreram acréscimos bruscos.

A instabilidade é considerada um estado limite último pelo fato de que, para uma determinada situação de carregamento, pequenos acréscimos de carga ou deformação podem representar muito, se estas não estiverem obedecendo a certos limites que devem ser rigorosamente respeitados. A ruína provocada por este tipo de estado limite último, em geral, não é avisada, fato este que evidencia ainda mais a necessidade da sua consideração, quando da elaboração do projeto, por questões de segurança.

O estudo da instabilidade de barras é feito a partir dos esforços nelas atuantes, incluindo os efeitos de 2ª ordem globais. É, portanto, considerada como complemento ao estudo da estabilidade global.

Adicionalmente é proposto um critério de ruptura de membro baseado nas proposições de Chen & Atsuta (2007).

O presente artigo visa contribuir para melhor entendimento dos efeitos da não linearidade geométrica, instabilidade e ruptura no tocante aos deslocamentos, esforços e comportamento de estruturas espaciais reticuladas.

2. Matriz, aproximações e método de análise

A não linearidade pode ser incorporada no contexto da análise matricial. A análise linear elástica continua sendo necessária, ou seja,

$$[K_e]\{\Delta\} = \{P\} \tag{1}$$

onde $[K_e]$ é a matriz de rigidez elástica, $\{\Delta\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $\{P\}$ é o vetor de cargas nodais. A matriz de rigidez elástica para o caso 3D é dada na Figura 1:

A Equação (1) pode ser colocada na forma incremental:

$$[K_t]\{d\Delta\} = \{dP\} \tag{2}$$

onde $[K_t]$ é a matriz de rigidez tangente, $\{d\Delta\}$ é o vetor de deslocamentos nodais incrementais e $\{dP\}$ é o vetor de cargas nodais incrementais. A matriz $[K_t]$ possui uma componente elástica linear e uma ou mais componentes adicionais que são funções das cargas e/ou deslocamentos.

Na análise elástica de segunda ordem os efeitos das deformações e deslocamentos são quantificados modificando a Equação (2),

$$[K_e + K_g]\{d\Delta\} = \{dP\} \tag{3}$$

onde K_g , matriz de rigidez geométrica, representa a mudança da rigidez que resulta destes efeitos. A matriz de rigidez geométrica para o caso 3D pode ser obtida em McGuire *et al.* (2014), Figura 2 :

$$K_e = \begin{bmatrix} \frac{EAx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EAx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{GJx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EIy}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{2EIy}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Simétrica} & & & & \frac{4EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EIz}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EAx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJx}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIy}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Matriz de rigidez para pórtico espacial
Fonte: GERE, WEAVER JR., 1987

$$K_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6P}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{P}{10} & 0 & -\frac{6P}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{P}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6P}{5L} & 0 & -\frac{P}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6P}{5L} & 0 & -\frac{P}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2PL}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{P}{10} & 0 & -\frac{PL}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Simétrica} & & & & \frac{2PL}{15} & 0 & -\frac{P}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{PL}{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6P}{5L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{P}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2PL}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2PL}{15} \end{bmatrix}$$

Figura 2: Matriz de rigidez geométrica para pórtico espacial
Fonte: McGuire *et al.*, 2014

É possível proceder a análise não linear de uma estrutura através de uma sucessão de etapas lineares de cálculo, com parâmetros de que depende o problema sendo mantidos constantes ao longo de cada etapa. Com base nos resultados obtidos, ao final de uma etapa, tais parâmetros são corrigidos, para utilização na etapa seguinte. O processo é dado por concluído

quando, em duas etapas consecutivas os parâmetros apresentam os mesmos valores, menos uma determinada tolerância.

Para o caso de estruturas carregadas apenas nos nós, objeto deste estudo, os efeitos não lineares afetam somente os coeficientes da matriz de rigidez do elemento. Assim, as correções necessárias (associadas a não linearidade) devem ser efetuadas na matriz de rigidez, permanecendo válida a metodologia de cálculo empregada para o método da rigidez (Martins, 1979). Resumidamente, é a matriz de rigidez do elemento que é afetada pelo fenômeno da não linearidade de uma estrutura.

3. Instabilidade elástica

Conforme formulação apresentada por Saouma (1999), para a instabilidade elástica, a matriz de rigidez incremental deve ser primeiramente avaliada usando intensidades de forças arbitrárias (desde que $[K_g]$ é uma função de $\{P\}$ e a intensidade do sistema de cargas axiais é ainda desconhecida). Para a flambagem ocorrer, a intensidade do sistema de forças axiais deve ser λ vezes o valor da força escolhida de forma arbitrária. Note que para uma estrutura, a distribuição inicial de cargas $\{\bar{P}\}$ deve ser obtida de uma análise elástica linear. Assim, a carga de flambagem é dada por:

$$\{P\} = \lambda \{\bar{P}\} \quad (4)$$

Desde que a matriz de rigidez geométrica é proporcional, no início, às forças internas, então:

$$[K_g] = \lambda [\bar{K}_g] \quad (5)$$

onde $[\bar{K}_g]$ corresponde a matriz de rigidez geométrica para valores unitários do carregamento aplicado ($\lambda = 1$). A matriz de rigidez elástica $[K_e]$ permanece constante, desta forma pode-se escrever:

$$([K_e] + \lambda [\bar{K}_g]) \{\Delta\} - \lambda \{\bar{P}\} = Q \quad (6)$$

Os deslocamentos são obtidos através de:

$$\Delta = ([K_e] + \lambda [\bar{K}_g])^{-1} \lambda \{\bar{P}\} \quad (7)$$

Para que os deslocamentos tendam ao infinito,

$$[K_e] + \lambda [\bar{K}_g] = 0 \quad (8)$$

que também pode ser expresso como:

$$[\bar{K}_g^{-1}] [K_e] + \lambda \{I\} = 0 \quad (9)$$

Não há solução única para a Equação 9 anterior. O valor mais baixo de $\lambda(\lambda_{crit})$ será a carga de flambagem para a estrutura. As cargas de flambagem serão dadas por:

$$\{P_{crit}\} = \lambda_{crit} \{\bar{P}_{crit}\} \quad (10)$$

A correspondente forma deformada é obtida do correspondente autovetor.

4. Definição da superfície de ruptura para vigas-colunas

Fazendo uso da formulação proposta por Chen & Atsuta (2007), considere uma seção retangular bxd onde o escoamento completo da seção transversal ocorre quando a tensão atinge o valor $(+\sigma_y)$ ou $(-\sigma_y)$. As relações de interação entre a força axial P e os momentos de flexão M_x e M_y são possíveis de determinar desde que se conheça a linha neutra $y = f(x)$ (desconsidera-se o efeito de flambagem).

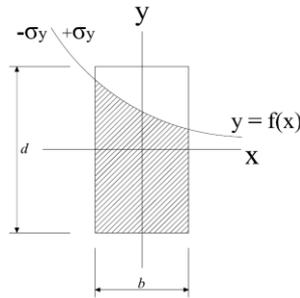


Figura 3: Seção retangular com eixo neutro
Fonte: Adaptado de CHEN & ATSUTA (2007)

A força axial P e os momentos M_x e M_y são positivos quando a força axial causa tração e os momentos de flexão produzem tensões de tração no primeiro quadrante. As equações de equilíbrio são dadas por:

$$P = - \int_{-b/2}^{+b/2} 2\sigma_y f(x) dx \quad (11)$$

$$M_x = \int_{-b/2}^{+b/2} \sigma_y [d^2/4 - f^2(x)] dx \quad (12)$$

$$M_y = - \int_{-b/2}^{+b/2} 2\sigma_y x f(x) dx \quad (13)$$

Definida $f(x)$ a solução de (11, 12 e 13) conduz:

$$p^2 + m_x + \frac{3}{4}m_y^2 = 1 \quad (14)$$

onde:

$$p = \frac{P}{P_y} \quad (15)$$

$$m_x = \frac{M_x}{M_{px}} \quad (16)$$

$$m_y = \frac{M_y}{M_{py}} \quad (17)$$

$$P_y = \sigma_y bd \quad (18)$$

$$M_{px} = \frac{1}{4} \sigma_y bd^2 \quad (19)$$

$$M_{py} = \frac{1}{4} \sigma_y db^2 \quad (20)$$

A Equação (14) é válida para:

$$m_y \leq \frac{2}{3}(1-p) \leq m_x \quad (21)$$

A Equação (14) é derivada para o caso particular de o eixo neutro passar através dos dois lados verticais da seção retangular (caso 1 do Figura 4). Há outras duas possibilidades de localização do eixo neutro (caso 2 e 3 da Figura 4) dependendo da magnitude de p, m_x e m_y .

Uma versão modificada da Equação (14) é dada por Orbison et al. (1982):

$$\phi(p, m_x, m_y) = p^2 + m_x^2 + m_y^2 + 3.5p^2m_x^2 + 3p^6m_y^2 + 4.5m_x^2m_y^2 = 1 \quad (22)$$

As equações de iteração para outros tipos de seções e a superfície de ruptura plotada, relacionando p, m_x e m_y , podem ser vistas em Chen & Atsuta (2007).

Caso	Localização da Linha Neutra N.A.	Curva de iteração	Válida para
1		$p^2 + mx + \frac{3}{4} m_y^2 = 1$	$m_x \geq \frac{2}{3} (1-p)$ $m_y \leq \frac{2}{3} (1-p)$
2		$p^2 + \frac{3}{4} m_x^2 + m_y = 1$	$m_x \leq \frac{2}{3} (1-p)$ $m_y \geq \frac{2}{3} (1-p)$
3		$p + \frac{9}{4} [1 - \frac{m_x}{2(1-p)}][1 - \frac{m_y}{2(1-p)}] = 1$	$m_x \geq \frac{2}{3} (1-p)$ $m_y \geq \frac{2}{3} (1-p)$

Figura 4: Equações de iterações para seção retangular.

Fonte: Adaptado de CHEN & ATSUTA (2007)

4.1. Efeito de torção

Morris & Fences (1969) derivaram equações de iteração para retangular e outros tipos de seções onde a torção é levada em consideração. Para uma seção retangular:

$$t = \frac{T}{T_p} \quad (23)$$

Onde T é o momento de torção e T_p é o momento de torção que plastifica por completo a seção transversal.

A relação entre a tensão normal e a tensão de escoamento é dada por:

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} = \sqrt{1-t^2} \quad (24)$$

O efeito do momento de torção t pode ser quantificado pela substituição de:

$$p \quad \text{por} \quad \sqrt{1-t^2} p \quad (25)$$

$$m_x \quad \text{por} \quad \sqrt{1-t^2} m_x \quad (26)$$

$$m_y \quad \text{por} \quad \sqrt{1-t^2} m_y \quad (27)$$

5. Exemplos

5.1. Exemplo 1: pilar

Considere um pilar engastado na base e carregado com forças horizontal e vertical no topo (Figura 5) onde os deslocamentos em análise linear e não linear diferem entre si. Os dados de entrada são dados na Tabela 1, e a Figura 6 mostra o gráfico dos deslocamentos para as diferentes análises obtidos pelo programa desenvolvido.

Tabela 1: Entrada de dados exemplo 1.			
$E = 25043961,348$ KN/m ²	$F1 = 50$ KN $F2 = 200$ KN	Área de seção transversal (A_x) = 0,09 m ²	Inércia em relação ao eixo x (I_x) = 0,00114075 m ⁴
$G = 10017584,54$ KN/m ²	$L = 5$ m	Inércia em relação ao eixo y (I_y) = 0,000675 m ⁴	Inércia em relação ao eixo z (I_z) = 0,000675 m ⁴



Figura 5: Pilar exemplo 1.
Fonte: Autores

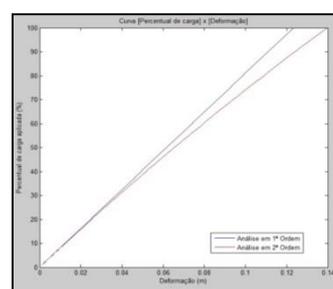


Figura 6: Gráfico de comparação dos deslocamentos.
Fonte: Programa desenvolvido pelos autores

Nota-se que para a análise não linear os deslocamentos são maiores que os obtidos para a análise linear, como demonstra a Tabela 2. Para comparação dos resultados, foi utilizado o software Mastan2.

Tabela 2: Verificação da variação dos deslocamentos.					
Deslocamentos no nó superior (cm)					
Análise em primeira ordem		Análise em segunda ordem		Porcentagem de aumento (%)	
Pesquisa	Mastan2	Pesquisa	Mastan2	Pesquisa	Mastan2
12,32	12,32	13,96	13,80	13,31%	12,01%

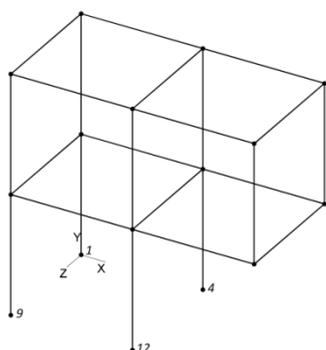
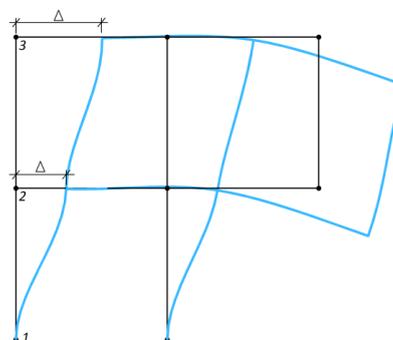
Observa-se que os valores das reações do momento no apoio (M_z) também aumentaram, conforme demonstra a Tabela 3. Neste caso, os resultados foram comparados com o software Mastan2 e Eberick.

Tabela 3:– Verificação do aumento do valor da reação de apoio M_z.								
Reações de apoio M_z (KN.m)								
Análise em primeira ordem			Análise em segunda ordem			Porcentagem de aumento (%)		
Pesquisa	Mastan2	Eberick	Pesquisa	Mastan2	Eberick	Pesquisa	Mastan2	Eberick
250	250	250	277,64	277,2	277,32	11,05%	10,88%	10,93%

5.2. Exemplo 2: pórtico espacial

A Figura 7 demonstra um pórtico espacial composto por 16 nós, 24 membros e carregamentos horizontais e verticais. A Tabela 4 mostra os dados de entrada para o exemplo.

$E = 25043961,348$ kN/m ²	Pilares: $Q_x = 4$ kN/m $Q_y = -4$ kN/m	A. seção transv. viga: $0,042\text{m}^2$ A. seção transv. pilar: $0,0196\text{m}^2$	I_x viga: $0,00019\text{m}^4$ I_x pilar: $0,000054\text{m}^4$
$G = 10017584,54$	$L = 3\text{m}$	Mom. Inérc. I_y viga: $0,000069\text{m}^4$	I_z viga: $0,000315\text{m}^4$

**Figura 7:** Pórtico espacial.Fonte: Adaptado Mcguire *et al.*, 2014**Figura 8:** Deformação pórtico espacial.Fonte: Adaptado Mcguire *et al.*, 2014

Para o pórtico espacial analisado, foram analisados os quatro nós inferiores engastados. Ao analisar os valores das reações de apoio e deslocamentos, considerando análise linear e não linear geométrica verifica-se os resultados descritos nos Tabelas 5 e 6, respectivamente. Não foram listadas as reações F_z , m_x e m_y por terem valores nulos ou quase nulos. Para este exemplo, os resultados foram comparados com o software Mastan2.

NÓ	Reação	Análise linear		Análise não linear		Porcentagem de aumento	
		Pesquisa	Mastan2	Pesquisa	Mastan2	Pesquisa	Mastan2
1=9	F_x (kN)	-33,69	-33,69	-42,45	-41,58	26%	23,42%
	F_y (kN)	-26,46	-26,46	-36,53	-36,26	38,05%	37,04%
	M_z	45,01	45,01	56,01	54,96	24,44%	22,1%
4=12	F_x (kN)	-26,305	-26,31	-17,54	-18,42	-33,32%	-30%
	F_y (kN)	401,46	401,5	411,53	411,3	2,51%	2,45%
	M_z	37,61	37,61	43,54	45,08	15,76%	19,86%

Nó	Δ (deslocamento horizontal) – (cm)					
	Análise linear		Análise não linear		Porcentagem de aumento	
	Pesquisa	Mastan2	Pesquisa	Mastan2	Pesquisa	Mastan2
1	0	0	0	0	0%	0%
2	8,033	8,033	10,096	9,94	25,68%	23,73%
3	14,585	14,59	17,25	17,1	18,27%	17,24%

5.3. Exemplo 3: verificação do critério de ruptura - pórtico plano

Para verificação do critério de ruptura, considera-se o pórtico plano da Figura 9, o qual se constitui de um pilar que nasce em uma viga de transição, com grande rigidez, e dois pilares de apoio para esta, onde um possui uma rigidez consideravelmente maior do que o outro. O resultado esperado para este exemplo, é que o pilar com menor rigidez tenha um rompimento

com um menor nível de carregamento em relação ao pilar com maior rigidez, e que o principal esforço seja o carregamento axial.

Neste exemplo, os efeitos de segunda ordem não resultam em grande aumento de esforços na estrutura, então, serão considerados os esforços gerados em análise linear. Os dados de entrada são: módulo de elasticidade longitudinal: 25.043.961,35 kN/m²; tensão longitudinal admissível: 20 MPa; Cargas: Q = -1000 kN; G = 3,15 kN/m; módulo de elasticidade transversal: 10.017.584,54 kN/m²; tensão transversal admissível: 8 MPa, L₁ = 3,5m, L₂ = 5m. Outros dados são mostrados na Tabela 7:

Tabela 7: Dados de entrada do exemplo 3.				
Membro	Área de seção transversal (m ²)	Momento de Inércia: I _x (m ⁴)	Momento de Inércia: I _y (m ⁴)	Momento de Inércia: I _z (m ⁴)
1	0,0196(14cmx14cm)	0,00005410	0,00003201	0,00003201
2 e 3	0,1260(14cmx90cm)	0,00074	0,0002058	0,00850
4	0,16 (40cmx40cm)	0,0036053	0,0021333	0,0021333

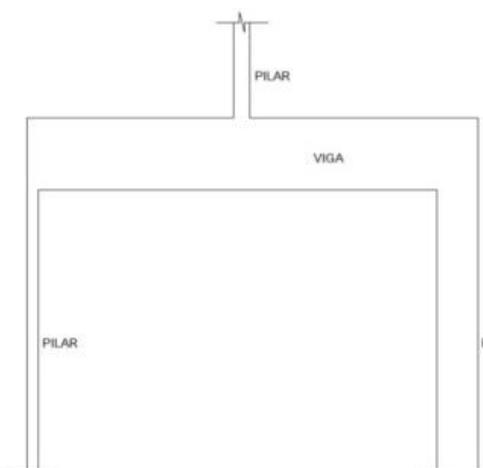


Figura 9: Pórtico plano.

Fonte: Adaptado Mcguire *et al.*, 2014

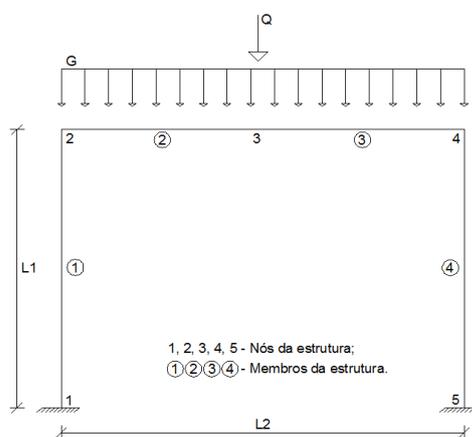


Figura 10: Numeração dos nós e membros.

Fonte: Ftool

Os resultados para as reações de apoio da estrutura estão descritos na Tabela 8. Os softwares utilizados para comparação dos resultados foram o Mastan2 e Ftool.

Tabela 8: Reações de apoio				
NÓ	Reação	Análise linear		
		Pesquisa	Mastan2	Ftool
1	F_x (kN)	5,1561	5,156	5,156
	F_y (kN)	486,61	486,6	486,61
	M_z	-7,5864	-7,59	-7,586
5	F_x (kN)	-5,1561	-5,16	-5,156
	F_y (kN)	529,14	529,1	529,14
	M_z	-98,739	-98,74	-98,739

Observando a Tabela 8, verifica-se que os resultados das reações verticais diferem entre si. Isso acontece pelo fato de que o pilar da direita possui maior rigidez e atrair

para si uma maior parcela do carregamento. Na Tabela 9, são demonstradas as porcentagens do carregamento total que rompe os membros. A Tabela 10 mostra os valores dos esforços máximos atuantes nos membros:

Membro	Porcentagem do carregamento que rompe o membro (%)
1	60%
2 = 3	48%
4	Não Rompe

Membro	Esforço axial	Esforço de flexão
1	486,60	10,46
2 = 3	5,156	1196,22
4	529,14	116,78

Analisando a Tabela 10 pode-se verificar quais são os esforços que mais contribuem para o rompimento dos membros. Por exemplo, para o membro 1, nota-se que a maior contribuição é do esforço axial, enquanto a flexão tem uma influência menor. Já para o membro 2 e 3, esta situação se inverte, ou seja, a flexão possui maior influência no colapso da barra. Por fim, para o membro 4 o esforço axial tem uma contribuição maior, embora a flexão também possui uma influência significativa. Apesar disso, devido a sua grande rigidez, o membro 4 não rompe com estas condições de carregamento.

5.4. Exemplo 4: verificação do critério de ruptura – pórtico espacial

Neste exemplo, avalia-se os efeitos que a consideração da não linearidade geométrica tem sobre o valor das reações de apoio, demonstrando os valores obtidos em uma análise linear e em análise não linear e, por fim, mostrando qual foi o acréscimo ou decréscimo gerado. Na sequência, são apresentados os efeitos que a não linearidade tem sobre a ruptura dos membros, a favor ou contra a segurança.

Para tal, considera-se o pórtico espacial demonstrado na Figura 11, o qual é composto por 54 nós, 106 membros e carregamentos distribuídos. A Tabela 11 mostra os dados do exemplo. Para a comparação dos resultados foi utilizado o software Mastan2.

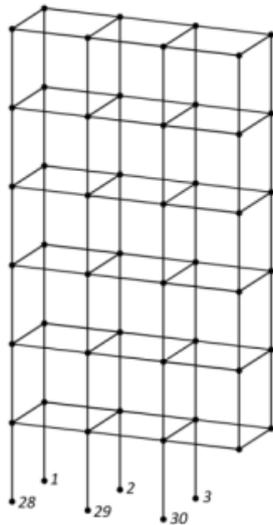


Figura 11: Pórtico espacial exemplo 4.

Fonte: Adaptado McGuire *et al.*, 2014

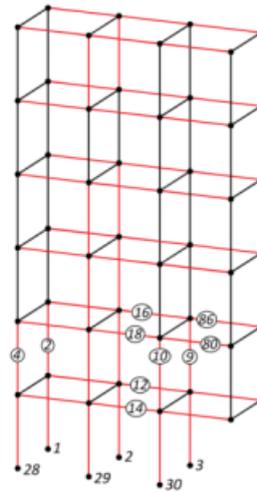


Figura 12: Em vermelho os membros que rompem (em análise não linear).

Fonte: Adaptado McGuire *et al.*, 2014

Tabela 11: Dados do exemplo 4.

$E = 25043961,348$ kN/m ²	Pilares: $Q_x = 2$ KN/m $Q_y = -5$ KN/m Vigas: $Q_y = -20$ KN/m	A. seção transv. Viga: 0,042m ² A. seção transv. Pilar: 0,09 m ²	I_x viga: 0,00019m ⁴ I_x pilar: 0,0011407 m ⁴
$G = 10017584,54$ kN/m ²	$L = 3$ m	I_y viga: 0,000069m ⁴ I_y pilar: 0,000675 m ⁴	I_z viga: 0,000315 m ⁴ I_z pilar: 0,000675 m ⁴

Inicialmente, a Tabela 12 demonstra os efeitos que a consideração da não linearidade geométrica causa nas reações de apoio deste pórtico. Não estão demonstrados os valores das reações F_z , M_x e M_y por estas serem nulas ou quase nulas.

Tabela 12: Reações de apoio para análise linear e não linear.

NÓ	Reação	Análise linear		Análise não linear		Porcentagem de aumento	
		Pesquisa	Mastan2	Pesquisa	Mastan2	Pesquisa	Mastan2
1=28	F_x (kN)	-105,98	-106	-116,98	-116,3	10,38%	9,74%
	F_y (kN)	-202,44	-202,4	-245,58	-244,8	21,31%	20,92%
	M_z (kN.m)	232,27	232,3	251,47	249,8	8,27%	7,55%
2=29	F_x (kN)	-144,36	-144,4	-147,27	-147,2	2,02%	1,97%
	F_y (kN)	551,61	551,6	551,7	551,7	0,02%	0,02%
	M_z (kN.m)	270,69	270,7	288,66	289	6,64%	6,76%
3=30	F_x (kN)	-94,65	-94,66	-80,75	-81,51	-14,69%	-13,88%
	F_y (kN)	1588,83	1589	1631,88	1631	2,71%	2,65%
	M_z (kN.m)	220,75	220,8	229,81	233,8	4,1%	5,91%

Percebe-se que, ao considerar os efeitos de segunda ordem, as reações de apoio tendem a aumentar (com exceção da reação horizontal do nó 3 (idem nó 30) que diminuiram).

Tabela 13: Porcentagem de carga que rompe determinado membro.

M*	Critério		Critério		M*	Critério		Critério	
	A.L.	A.N.L.	A.L.	A.N.L.		A.L.	A.N.L.	A.L.	A.N.L.
1=3	58%	53%	58%	54%	52=60	32%	30%	32%	30%
2=4	--	97%	--	98%	53=61	42%	40%	42%	40%
5=7	48%	45%	49%	46%	54=62	38%	36%	38%	36%

6=8	56%	52%	57%	53%	55=63	50%	48%	50%	48%
9=10	79%	73%	86%	80%	56=64	45%	43%	45%	43%
11=13	32%	30%	32%	30%	57=65	82%	79%	82%	79%
12=14	28%	26%	28%	26%	58=66	53%	51%	53%	51%
15=17	30%	28%	30%	28%	79=85	72%	75%	71%	75%
16=18	28%	26%	28%	26%	80=86	73%	77%	73%	77%
33=37	70%	68%	71%	70%	81=87	61%	62%	61%	62%
34=38	82%	83%	84%	84%	82=88	50%	49%	50%	49%
36=40	98%	95%	100%	97%	83=89	41%	40%	41%	40%
49=50	46%	44%	50%	48%	84=90	42%	41%	42%	41%
51=59	35%	33%	35	33%	Onde: M - Membro; A.L. - Análise Linear; A.N.L. - Análise Não Linear.				

Na Tabela 13 estão apresentados os efeitos que a consideração da não linearidade geométrica tem no rompimento dos membros, segundo o critério de ruptura descrito na seção 4. O método utilizado neste trabalho consiste em dividir o carregamento total da estrutura em vários incrementos menores. A Tabela 13 apresenta as porcentagens do carregamento total que rompem os diferentes membros, tanto em análise linear quanto em análise não linear, considerando os dois critérios de ruptura apresentados (Equação 14 e Equação 22, respectivamente). Os membros que não estão relacionados na Tabela 13 não sofreram o rompimento.

Ao analisar a Tabela 13, verificar as porcentagens do carregamento total que rompe o membro, para os diferentes critérios adotados e para os dois métodos de análise (linear e não linear). Observa-se que, de um modo geral, a consideração do efeito de segunda ordem acarreta em um aumento dos esforços na estrutura, o que faz com que o rompimento exista com uma menor porcentagem do carregamento total. Porém, isto não é regra, já que em determinados membros, a consideração do efeito de segunda ordem provoca o efeito contrário, ou seja, é necessária uma maior porcentagem do carregamento total para que o rompimento aconteça, como por exemplo, o membro 80 (idem 86). Mas, maior parte dos membros acaba rompendo antes quando considerado os efeitos da não linearidade geométrica (88,88% dos membros).

Observa-se também que o membro mais solicitado com a aplicação da análise não linear é o membro 9 (idem membro 10), que em análise linear rompe com 79% do carregamento total, em análise não linear passa a romper com 73% do carregamento total. Outro fato que chama atenção é que o membro 2 (idem membro 4) que não rompe em análise linear, passar a romper em análise não linear.

Pode-se observar que os primeiros elementos estruturais a entrar em colapso, nesta estrutura, seriam os membros 12 (idem 14) e 16 (idem 18), os quais rompem com 26% do carregamento total da estrutura. Um resultado que a priori pode chamar atenção devido ao baixo valor da carga axial atuante, porém, existe um esforço de momento M_z significativo. A Tabela 14 demonstra os esforços que atuam nos elementos em análise linear e não linear.

M*	Análise Linear			Análise Não Linear			M*	Análise Linear			Segundo Critério		
	N	M _z	M _y	N	M _z	M _y		N	M _z	M _y	N	M _z	M _y
1=3	208	232	5,76	252	251	5,7	52=60	0	200	0	2,9	213	0
2=4	145	125	7,89	178	137	7,89	53=61	2,95	151	0	1,1	160	0
5=7	552	271	5,77	552	289	5,75	54=62	5,97	170	0	8,2	180	0
6=8	459	234	7,89	459	253	7,9	55=63	10	127	0	10	133	0
9=10	1318	96	7,95	1354	108	7,97	56=64	27	142	0	27	149	0
11=13	4,85	200	0,00	4,84	215	0	57=65	26	77	0	28	81	0
12=14	22,5	226	0,00	23	243	0	58=66	98	119	0	103	124	0
15=17	2,73	211	0,00	6,7	227	0	79=85	10,8	89	0	6,7	84,1	0
16=18	15,7	229	0,00	20	245	0	80=86	20	87,3	0	18,6	82,6	0
33=37	365	186	6,84	364	191	6,83	81=87	2,63	104	0	1,2	103	0
34=38	270	159	7,24	270	158	7,2	82=88	9,44	128	0	8,2	129	0
36=40	83	135	12,4	82	139	12	83=89	17	156	0	19	160	0
49=50	1589	221	5,83	1632	230	5,8	Onde: M- Membro; N-Axial; M _z - Momento eixo Z; M _y - Momento eixo Y.						

5.5. Exemplo 5: estabilidade elástica

Este exemplo trata de estabilidade elástica. O objetivo é determinar a carga de flambagem da coluna apresentada na Figura 13. Utilizando o programa desenvolvido, através da solução da Equação (9), obtêm-se os autovalores e os autovetores, os quais estão demonstrados na Tabela 15.

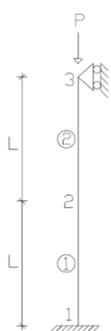


Figura 13: Coluna exemplo 5.

Fonte: Adaptado Saouma, 1999.

Autovetores			Autovalores
32.0	-40.0	24.0	49.3808
-1.17	8.33	1.0	18.7754
11.5	-5.00	33.0	5.1772

Conforme mencionado anteriormente, o valor mais baixo de λ será a carga de flambagem, ou seja, $\lambda_{crit} = 5,1772$. A solução exata para uma coluna de comprimento L é

$$P_{crit} = 5,0477 \frac{EI}{L^2} \text{ (Saouma, 1999). Portanto, uma diferença de 2,5\%.}$$

6. Conclusões

O exemplo 5.1 mostra uma estrutura relativamente simples, mas de fácil visualização dos efeitos que a não linearidade geométrica ocasiona. Os resultados foram comparados com outros dois softwares, Mastan2 e Eberick, para que fosse feita a validação dos resultados. Ao

analisar o pilar com vinculações engastado-livre, os resultados mostram que houve, em média, um acréscimo de deformação horizontal da estrutura (no nó superior) no valor de 12,66% e de esforços de flexão em 10,95%.

O exemplo 5.2, aborda os efeitos da análise não linear. Para este exemplo analisou-se um pórtico espacial, onde os resultados foram comparados com o software Mastan2. Da análise, pode-se observar que a consideração da não linearidade geométrica causa um aumento dos deslocamentos na estrutura (Tabela 6) e causa, também um acréscimo de esforços nas reações de apoio (Tabela 5), com exceção das reações horizontal dos nós 4 e 12, as quais tiveram uma diminuição nos seus valores quando comparado com a análise linear.

Por sua vez, o exemplo 5.3 trata da verificação do critério de ruptura que foi adicionado ao programa. Para este exemplo, foi analisado um pórtico plano, onde se tinha dois pilares, um destes com uma rigidez consideravelmente maior do que o outro. O objetivo era verificar que o pilar com menor rigidez deveria romper com um menor nível de carregamento em relação ao pilar com maior rigidez. Os esforços obtidos foram comparados com o software Mastan2 e com o software Ftool. Fazendo a análise dos resultados, verifica-se que os mesmos comprovam o que a priori era imaginado, o pilar com menor rigidez rompeu com 60% do carregamento total, enquanto que no pilar com maior rigidez foi aplicado 100% da carga e o mesmo não apresentou ruptura.

O exemplo 5.4 aborda os efeitos que a não linearidade geométrica causa na ruptura dos membros da estrutura. Como a análise não linear causa (na maioria dos casos) um aumento de esforços na estrutura, como se verifica nos exemplos 5.1 e 5.2, pressupõem-se que a consideração da não linearidade geométrica fizesse com que a maioria dos membros rompessem com um nível de carregamento menor quando comparado com a análise linear. Analisando os resultados, comprova-se que foi inicialmente imaginado. Em 88,88% dos membros, foi necessário um menor nível de carregamento para que o membro rompesse.

Já o exemplo 5.5 trata da estabilidade elástica, onde se tem como objetivo determinar a carga crítica de um pilar. Os resultados foram comparados com os da bibliografia, onde o programa desenvolvido gerou resultados satisfatórios.

7. Referências

- ALTOQI INFORMÁTICA. AltoQi Eberick – *Programa para cálculo e detalhamento de edificações em concreto*. Disponível em: <http://www.altoqi.com.br/eberick/>. Acesso em: 08 de agosto de 2018.
- CHEN, Wai-Fah, ATSUTA, T, 2007. *Theory of Beam-Columns, Volume 2: Space Behavior and Design*. J. Ross Publishing.
- GERE, J. M.; WEAVER JR., W., 1987. *Análise de Estruturas Reticuladas*. Ed. Guanabara, Rio de Janeiro.
- MARTHA, L. F. *Ftool - programa para a análise estrutural de pórticos planos*. PUC-Rio. Disponível em: <https://www.ftool.com.br/Ftool/>. Acesso em: 08 de agosto de 2018.
- MARTINS, P.C.R., 1979. *Análise Não-Linear de Estruturas Reticuladas Espaciais de Concreto Armado*. Tese. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia, Rio de Janeiro, 177 p.
- MATHWORKS INC – *Matlab - high-level language and interactive environment for numerical computation, visualization, and programming*. Disponível em: https://www.mathworks.com/products/matlab.html?s_tid=hp_ff_p_matlab. Acesso em: 08 de agosto de 2018.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D., 2014. *Matrix Structural Analysis*. Publisher: John Wiley & Sons.
- MORRIS, G. A.; FENVES, S.J., 1969. Approximate yield surface equations. *J. Engng Mech. Div., ASCE* 95, 957-954.
- ORBISON, J.; MCGUIRE, W. ABEL, J., 1982. Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - COMPUT METHOD APPL MECH ENG*, vol. 33, no. 1-3, pp. 557-573.
- SAOUMA V.E., 1999. *Matrix structural analysis and introduction to finite elements (lecture notes)*. Colorado.
- ZIEMIAN, R. D.; MCGUIRE, W. *Mastan2 - Interactive structural analysis program*. Disponível em: <http://www.mastan2.com/>. Acesso em: 08 de agosto de 2018