

DETERMINAÇÃO DE MODELOS DISCRETOS PARA UMA PLANTA DIDÁTICA DE MONITORAÇÃO E CONTROLE DE FLUXO COMPARANDO ESTIMADORES RECURSIVOS

*Brehme Dnapoli Reis de Mesquita¹
Rejane de Barros Araújo²*

Resumo: Este artigo apresenta a estimação de modelos matemáticos discretos para uma planta didática de monitoração e controle de fluxo usando algoritmos recursivos. Usando o modelo auto regressivo (AR), auto regressivo com entradas exógenas (ARX) e auto regressivo com média móvel e entradas exógenas (ARMAX), comparou-se a eficiência da estimação usando o Estimador Recursivo de Variáveis Instrumentais e o Estimador Recursivo de Aproximação Estocástica, de acordo com a função custo de cada algoritmo recursivo. As simulações foram feitas usando o programa *MATLAB*[®], e foram obtidos os gráficos das respostas dos modelos estimados.

Palavras-chave: modelos auto regressivos; estimador recursivo de variáveis instrumentais; estimador recursivo de aproximação estocástica; *MATLAB*[®].

Abstract: *This article presents the estimation of discrete mathematical models for a didactic system of monitoring and flow control using recursive algorithms. Using the autoregressive (AR) model, autoregressive with exogenous inputs (ARX), and autoregressive moving average with exogenous inputs (ARMAX), was compared the efficiency of the estimates using of the Recursive Estimator with Instrumental Variables and of the Recursive Estimator Stochastic Approach, according to the cost function each recursive algorithm. The simulations were performed using the software MATLAB[®] and thus obtained the response graphs for each model estimated.*

Keywords: *autoregressive models; recursive estimator with instrumental variables; recursive estimator stochastic approach; MATLAB[®].*

¹Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA). Curso de Engenharia de Controle e Automação. E-mail: mesquita.brehme@gmail.com

²Departamento de Ensino de Processos Industriais do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA). E-mail: rejane.barros@ifpa.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A representação de sistemas e fenômenos observados, por meio de modelos matemáticos, sempre foi um desafio. Desde a antiguidade, o homem tenta descrever matematicamente sistemas reais para ajudar na necessidade do entendimento de sua dinâmica e assim resolver problemas relacionados aos mesmos.

Até então os sistemas eram modelados através das equações que descreviam a física do processo, entretanto uma das mudanças ocorridas em meados dos anos 90 foi a crescente necessidade de desenvolver formas de obter modelos matemáticos a partir de dados observados (Aguirre, 2007). De acordo com (Aguirre, 2007), as possíveis razões para essa mudança são várias, mas o autor menciona as seguintes: em primeiro lugar, geralmente os sistemas com os quais se precisavam lidar eram mais complexos, e conseqüentemente, nem sempre era possível escrever as equações básicas, procedimento este conhecido como *modelagem fenomenológica* ou *modelagem baseada na física do processo*; em segundo lugar, com o advento da informática os computadores tornaram-se baratos e acessíveis, apresentando bom desempenho, viabilizando, assim, usá-los para processar dados coletados diretamente dos sistemas e, a partir de tais observações, desenvolver modelos matemáticos capazes de explicar a dinâmica dos processos, procedimento este conhecido como *modelagem empírica* ou *identificação de sistemas*.

Identificação de sistemas é o campo da modelagem de sistemas dinâmicos a partir de dados experimentais (Söderström e Stoica, 1989). Pode-se descrever conceitualmente um sistema dinâmico a partir da Figura 1. O sistema é impulsionado por variáveis de entrada $u(t)$ e por distúrbios $v(t)$. O usuário pode controlar as variáveis $u(t)$, mas não as variáveis $v(t)$. Entretanto, as variáveis que fornecem informações úteis sobre o sistema são os sinais de saída.

A partir das informações a respeito dos sinais de saída $y(t)$ de um dado sistema, levantam-se os parâmetros da dinâmica do processo utilizando a(s) técni-

ca(s) de identificação de sistemas que seja(m) a(s) mais adequada(s). Na literatura encontram-se diversos métodos de identificação (Aguirre, 2007; Ljung, 1999; Söderström e Stoica, 1989), cada um com suas vantagens e restrições, que estão em uso na comunidade científica ou até mesmo na indústria.

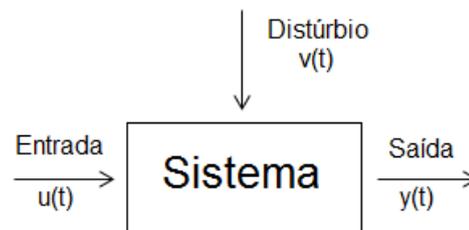


Figura 1. Um sistema dinâmico com entrada $u(t)$, saída $y(t)$ e distúrbio $v(t)$, onde t denota tempo.

Em ambiente industrial, normalmente as plantas não apresentam de antemão informações a respeito de sua dinâmica física, necessitando então que se façam estudos para levantar as características do processo e os parâmetros responsáveis pela resposta. Estes estudos consistem no entendimento do funcionamento da planta, sua constituição física (se os componentes apresentam comportamentos lineares ou não lineares) e sua(s) resposta(s) de acordo com determinada entrada conhecida.

Este artigo apresenta dois algoritmos recursivos para a identificação de parâmetros de uma planta de monitoramento e controle de fluxo, Figura 2, de fabricação da *DidactaItalia*[®], que se encontra no Laboratório de Automação e Controle de Processos Industriais (LACOPI) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA). O primeiro algoritmo é conhecido como Estimador Recursivo de Variáveis Instrumentais (ERVI), o qual tem a finalidade de gerar o vetor $\hat{\theta}$ (vetor dos coeficientes estimados) e o vetor ξ (vetor de erro de estimação) através do vetor z (vetor de variáveis instrumentais). O segundo algoritmo é o Estimador Recursivo de Aproximação Estocástica (ERAE), o qual utiliza o vetor γ para gerar os vetores $\hat{\theta}$ e

ξ. Os modelos discretos propostos para a modelagem do sistema são: o auto regressivo (*autoregressive* – AR), o auto regressivo com entrada exógena (*autoregressivewithexogenousvariable* – ARX) e o auto regressivo com média móvel e entrada exógena (*autoregressivewithexogenousvariableand MA noise* – ARMAX). Os algoritmos foram desenvolvidos no *MATLAB* e obtidos os gráficos de resposta das identificações utilizando cada uma das técnicas e modelos.



Figura 2. Planta de monitoração e controle de fluxo (CRF) da *DidactaItalia* que se encontra no LACOPI/IFPA.

2. MODELOS DISCRETOS

Há diversas formas de se representar matematicamente um sistema ou processo. Podem-se destacar as funções de transferência e os modelos em espaço de estados como representações usuais. Entretanto, estas representações descrevem as saídas como se fossem unicamente determinadas pelas entradas, as quais em muitas situações são irrealistas, devido às perturbações diversas que agem sobre o sistema de medições (Walter e Pronzato, 1997). Com isso, é necessário encontrar formas de descrever a influência dessas perturbações e também, em alguns casos, influência das próprias entradas e dos valores anteriores de saída.

Considere o seguinte modelo geral:

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)A(q)}v(k) \quad \text{Eq. (1)}$$

sendo q^{-1} o operador de atraso, de forma que $y(k)q^{-1} = y(k-1)$, onde $y(k)$ é a

saída do sistema, $u(k)$ a entrada, $v(k)$ ruído branco e $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$, e $F(q)$ os polinômios definidos a seguir:

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 - a_1q^{-1} - \dots - a_{n_y}q^{-n_y}; \\ B(q) &= b_1q^{-1} + \dots + b_{n_u}q^{-n_u}; \\ C(q) &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_v}q^{-n_v}; \\ D(q) &= 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d}; \\ F(q) &= 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}; \end{aligned}$$

Através do modelo geral da Equação(1), podem-se determinar as representações em tempo discreto AR, ARX e ARMAX.

A representação auto regressiva (AR) fica da seguinte forma:

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_{n_y}y(k-n_y) \quad \text{Eq. (2)}$$

ou seja, para a representação auto regressiva necessita-se dos valores das saídas para estimar os parâmetros do sistema.

Quando se adiciona os valores de entrada, tem-se o modelo auto regressivo com entrada exógena (ARX):

$$y(k) = a_1y(k-1) + \dots + a_{n_y}y(k-n_y) + b_1u(k-1) + \dots + b_{n_u}u(k-n_u) \quad \text{Eq. (3)}$$

Já a representação do modelo auto regressivo com média móvel e entrada exógena (ARMAX) é:

$$y(k) = a_1y(k-1) + \dots + a_{n_y}y(k-n_y) + b_1u(k-1) + \dots + b_{n_u}u(k-n_u) + c_1\xi(k-1) + \dots + c_{n_\xi}\xi(k-n_\xi) + \xi(k) \quad \text{Eq. (4)}$$

sendo que n_y , n_u e n_ξ são inteiros e ξ é denominado resíduo ou erro cometido pelo modelo ao tentar modelar $y(k)$, ou seja, é o erro de estimação. O resíduo ξ é uma variável aleatória, o que torna o modelo ARMAX estocástico. Na prática,

obtêm-se os modelos AR e ARX também com o termo de resíduo $\xi(k)$ (Aguirre, 2007). Vale ressaltar que as representações AR e ARX são casos particulares da representação ARMAX.

3. ALGORITMOS RECURSIVOS

Os algoritmos recursivos, também conhecidos como estimadores recursivos, são técnicas de identificação recursiva no tempo (Söderström e Stoica, 1989), ou seja, existe uma estimação $\hat{\theta}(t-1)$ com base em dados anteriores $t-1$. Outros estimadores ou técnicas de identificação utilizam os dados da planta “de uma só vez”, isto é, em *batelada*, assim encontra-se a matriz de regressores $\hat{\theta}$. Já os estimadores recursivos utilizam os dados sequencialmente, procedimento conhecido como *estimação recursiva*. Desta forma, o regulador estará dependente do comportamento anterior do processo (Söderström e Stoica, 1989).

Considere a representação do sistema como:

$$y(k) = \psi^T \theta + e(k) \quad \text{Eq. (5)}$$

sendo que ψ representa as variáveis regressoras. A esperança matemática e a covariância do erro são iguais, respectivamente, a $E[e(k)] = 0$ e $cov[e(k)] = R$.

Para o modelo descrito na Equação(5) pode ser escrito da seguinte forma:

$$y(k) = \psi_k^T(k-1)\hat{\theta}_k + \xi(k) \quad \text{Eq. (6)}$$

sendo que o vetor de regressores $\psi_k(k-1) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ é formado na interação k com informação disponível até a interação $k-1$. $\hat{\theta}_k \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ indica o vetor de parâmetros estimado na interação k .

No contexto de estimação recursiva, é interessante expressar $\hat{\theta}_k$ em função do último valor estimado, ou seja, $\hat{\theta}_{k-1}$. Além disso, a nova estimativa deve, de alguma forma, incorporar informação atualizada que vem na medição $y(k)$, no instante k (Aguirre, 2007). A fim de tentar atender a esses requisitos, propõe-se, então, escrever:

$$\hat{\theta}_k = J_k \hat{\theta}_{k-1} + K_k y(k) \quad \text{Eq. (7)}$$

ou seja, o vetor de parâmetros no instante k é expresso como uma combinação linear do seu valor no instante anterior e do valor da medição no instante k . Este procedimento é denominado de *atualização recursiva*. Na Equação (7), $J_k \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ e $K_k \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}$ são matrizes que deverão ser determinadas de tal maneira a garantir que o vetor $\hat{\theta}_k$ seja uma boa estimativa. Para isso, duas restrições são impostas:

- i) $\hat{\theta}_k$ deve ser não polarizado, ou seja, $E[\hat{\theta}_k] - \theta = 0$;
- ii) $cov[\hat{\theta}_k]$ deve ser tão pequena quanto possível.

Observando a primeira restrição e aplicando-a para que o esquema da atualização recursiva seja não polarizado, pode-se escrever a Equação (7) da seguinte forma:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k (y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1}) \quad \text{Eq. (8)}$$

Deve ser observado que pelo fato de se estar derivando um algoritmo recursivo não é necessário montar a matriz de regressores Ψ , e passa-se a usar o vetor de regressores ψ (Aguirre, 2007).

Através da Equação (8) determina-se o novo valor estimado de $\hat{\theta}_k$, o qual, por sua vez, depende de um ganho, K_k , e de $(y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1})$. Esta parcela entre parênteses é o erro de predição cometido pelo modelo ao prever os valores medidos. Denomina-se esta parcela como inovação e é indicada na literatura por:

$$\eta(k) = y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1} \quad \text{Eq. (9)}$$

A diferença entre as inovações e os resíduos é que apenas os resíduos são calculados utilizando o valor atualizado dos parâmetros, ou seja, $\xi(k) = y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1}$. Portanto, na prática, primeira-

mente se determina $\eta(k)$, com isso pode-se determinar $\hat{\theta}_k$ usando a Equação (8), e só então podem ser calculados os resíduos $\xi(k)$ (Aguirre, 2007).

Para determinar $\hat{\theta}_k$, além de necessitar de $\eta(k)$, é necessário conhecer K_k . Essa matriz de ganhos é determinada aplicando a segunda restrição, ou seja, que a covariância do esquema de atualização recursiva seja mínima. Assim, pode-se escrever a matriz de ganhos K_k da seguinte forma:

$$K_k = P_{k-1}\psi_k(\psi_k^T P_{k-1}\psi_k + R)^{-1} \quad \text{Eq. (10)}$$

Assim as Equações (8) e (10) juntamente com a matriz de covariância P_k compõem um algoritmo recursivo, seguindo a ordem de cálculo abaixo:

$$\begin{cases} K_k = P_{k-1}\psi_k(\psi_k^T P_{k-1}\psi_k + R)^{-1} \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k[y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1}] \\ P_k = (I - K_k\psi_k^T)P_{k-1}(I - K_k\psi_k^T)^T + K_k R K_k^T \end{cases} \quad \text{Eq. (11)}$$

Os elementos da diagonal principal da matriz de covariância P_k são as variâncias dos respectivos elementos no vetor de parâmetros e, portanto, indicam o grau de confiança que se tem nos valores estimados dos elementos $\hat{\theta}_k$, ou seja, quanto maior for a confiança em um determinado valor, tanto menor será o valor correspondente na diagonal principal de P_k (Aguirre, 2007).

Dentro dos vários tipos de estimadores recursivos encontrado na literatura, escolheram-se o Estimador Recursivo de Variáveis Instrumentais (ERVI) e o Estimador Recursivo de Aproximação Estocástica (ERAE) como técnicas de identificação para comparar a eficiência na modelagem do sistema da Figura 2 para as duas técnicas.

O ERVI, discutido em Young (1970), utiliza um vetor denominado vetor de variáveis instrumentais z_k para a estimação do vetor de parâmetros $\hat{\theta}_k$. O algoritmo pode ser implementado da seguinte forma:

$$\begin{cases} M_k = M_{k-1} - M_{k-1}z_k[1 + \psi_k^T M_{k-1}z_k]^{-1}\psi_k^T M_{k-1} \\ K_k = M_k z_k \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k[y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1}] \\ \xi(k) = y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_k \end{cases} \quad \text{Eq. (12)}$$

Observe-se que no ERVI a matriz M não é simétrica e não mais corresponde à matriz de covariância $\text{cov}[\hat{\theta}]$ (Aguirre, 2007; Ljung e Söderström, 1983).

Nos algoritmos recursivos, a etapa que exige maior esforço computacional é a determinação da matriz de covariância P , Equação (11), ou a matriz M , Equação (12). Em casos nos quais as limitações de tempo de computação são críticas e quando a propriedade da mínima covariância não for uma necessidade, pode-se usar uma matriz de ganho do tipo $K_k = \gamma_k \psi_k$ (Aguirre, 2007; Ljung e Söderström, 1983). Assim, o resultado é o ERAE, descrito em Ljung (1977), o qual pode ser implementado da seguinte forma:

$$\begin{cases} K_k = \gamma_k \psi_k \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k[y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1}] \\ \xi(k) = y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_k \end{cases} \quad \text{Eq. (13)}$$

Caso os modelos cujos parâmetros se deseja estimar sejam dos tipos AR e ARX, Equações (2) e (3) respectivamente, não é necessário usar a última equação em (13) (Aguirre, 2007). Entretanto, neste trabalho utilizou-se o vetor de resíduos ξ para os três modelos.

Há diversas formas de se escolher γ_k , uma delas é através da representação abaixo, referenciada em (Aguirre, 2007):

$$\gamma_k = C k^{-\alpha} \quad \text{Eq. (14)}$$

onde $0,5 \leq \alpha \leq 1$, C uma constante positiva e k o instante do processo. A única maneira de $\hat{\theta}$ convergir para um valor em regime com covariância zero, ou seja, $\text{cov}[\hat{\theta}_\infty] = 0$, é fazer com que $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$. Por outro lado, quando γ_k tiver valores muito pequenos, a taxa de convergência do estimador será baixa. Assim, a escolha de γ_k deverá ser um

compromisso entre tempo de convergência e covariância do vetor estimado (Aguirre, 2007).

4. PLANTA DE MONITORAÇÃO E CONTROLE DE FLUXO

A planta de monitoração e controle de fluxo torna possível a análise do comportamento de uma malha de controle, onde a variável controlada é o fluxo de um líquido no circuito. Podem-se analisar diversos efeitos de diferentes parâmetros de controle sobre o desempenho da malha, observando a eficiência e a estabilidade do sistema.

A planta é composta, em geral, pelo simulador de processo (componente) e pelo sistema de monitoramento (programa). A Figura 3 mostra o esquema de funcionamento e composição da planta.

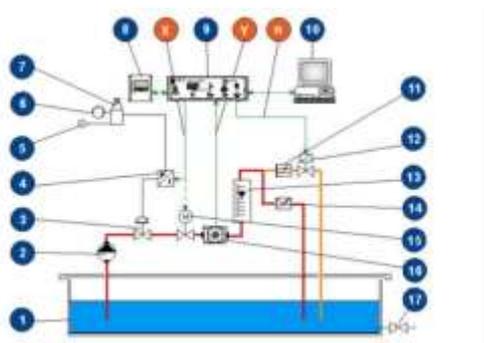


Figura 3. Esquema de funcionamento e composição da planta de fluxo. Fonte: *DidactItalia*.

O simulador de processo é dividido em: reservatório com capacidade para 40 litros [1]; bomba centrífuga [2]; medidor de vazão para leitura direta [13]; transdutor de fluxo da turbina com saída analógica [16]; válvula pneumática proporcional para regulação de fluxo [3]; conversor pressão-corrente para o controle da válvula proporcional [4]; válvula solenoide para introduzir perturbação no sistema [12]; fonte de alimentação; unidade de controle e condicionamento de sinal [9]; e placa de aquisição A/D-D/A de 14 bits.

Através da unidade de condicionamento de sinal, pode-se realizar o controle manualmente do sistema, através da regulação da pressão de entrada na válvula pneumática, sendo que a mesma traba-

lha na faixa de 3 – 15 PSI. A leitura é realizada através da visualização do medidor de vazão.

Na utilização do sistema através do computador, os sinais de pressão e de vazão são enviados à placa de aquisição e monitorados pelo *Artan*® (programa de monitoração e aplicação de técnicas clássicas de controle). A partir do *Artan*®, pode-se determinar o sinal de entrada entre a faixa de 0 – 100%, no qual é convertido em sua pressão correspondente através do transdutor de pressão-corrente.

5. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Como explicitado no tópico inicial deste artigo, há uma planta didática de monitoração e controle de fluxo, de fabricação da *DidactItalia*®, no LACOPI-IFPA, onde a mesma não apresenta informações sobre sua modelagem ou função de transferência que rege a dinâmica do processo. O manual disponibilizado pela empresa é insuficiente no requisito de informações, tratando apenas de apresentar os materiais de constituição da mesma.

A planta didática de monitoração e controle de fluxo (CRF) é conectada a um computador, onde se realiza a monitoração e o controle da planta através do software *Artan*®. Fez-se a aquisição dos dados de entrada e saída do sistema no formato “.dat” e toda a simulação de identificação foi realizada no *MATLAB*®. Obtiveram-se alguns resultados da saída do sistema para entradas distintas (amplitudes diferenciadas). Dentre os dados obtidos, escolheram-se os dois mostrados nas Figuras 4 e 5.

O propósito na escolha desses dados é o de mostrar que o sistema apresenta ruído na resposta, e mais ainda, de que o ruído do sistema apresenta uma determinada amplitude, que interfere nas respostas de entradas com valores de referência baixos. Fica bastante visível ao comparar o gráfico da Figura 4 com o da Figura 5. Para ambos os gráficos, a entrada $u(k)$ está sendo ilustrada na cor azul e a saída $y(k)$ na cor vermelha, e, além disso, os dados foram normalizados para facilitar os cálculos e as comparações.

A partir desses dados, foram desenvolvidos os dois algoritmos recursivos descritos em (12) e (13) para os modelos discretos AR, ARX e ARMAX, utilizando o *MATLAB*[®].

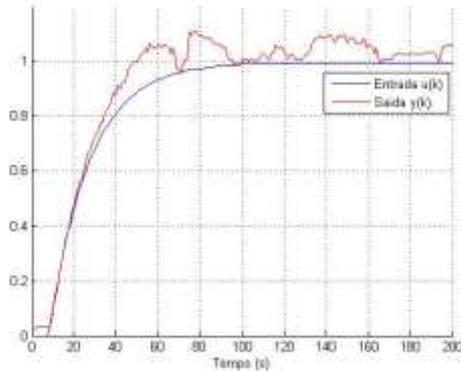


Figura 4. Resposta normalizada da planta didática para uma entrada com valor de referência igual a 2%.

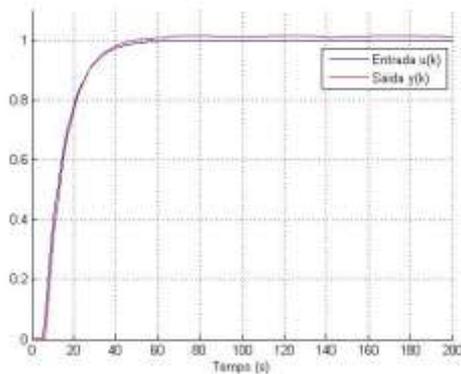


Figura 5. Resposta normalizada da planta didática para uma entrada com valor de referência igual a 50%.

6. RESULTADOS

A partir das Equações (2), (3) e (4), o objetivo é representar a dinâmica da planta didática através dos modelos discretos. As equações a seguir são os modelos escolhidos para a representação.

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) \quad \text{Eq. (15)}$$

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad \text{Eq. (16)}$$

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + c_1 \xi(k-1) + \xi(k) \quad \text{Eq. (17)}$$

Os três modelos foram desenvolvidos para cada técnica de identificação. Esta escolha decorre do objetivo de se analisar qual modelo e técnica mais se adequa a dinâmica da planta através de um parâmetro de análise qualitativa da estimação de modelos, conhecido como função custo. Como determinado em (Aguirre, 2007) a função custo é um índice que quantifica a qualidade de ajuste de $X\hat{\theta}$ ao vetor de dados y . Assim, em princípio, seria vantajoso que o valor estimado $\hat{\theta}$ minimizasse J .

$$J = (y - X\hat{\theta})^T (y - X\hat{\theta}) \quad \text{Eq. (18)}$$

Como o modelo ARMAX necessita do vetor de erros para a estimação e como o programa da planta não mensura estes valores, utilizou-se a ferramenta *Simulink*[®], do *MATLAB*[®], para gerar um vetor de erro gaussiano e assim adicioná-lo a saída. Os resultados serão discutidos a partir de cada estimação.

a) Estimador Recursivo de Variáveis Instrumentais (ERVI)

Utilizando os dados de saída amostrados na Figura 4 e o vetor de entrada como o vetor de variáveis instrumentais ou vetor z (sistema endógeno), obtiveram-se as respostas das Figuras 6 a 10 para as estimações a partir do ERVI. Para o modelo AR da Equação (15), utilizaram-se os valores anteriores da saída para determinar o valor no instante k . Adicionando-se duas entradas, tem-se o modelo ARX, Equação (16). E utilizando o vetor de resíduo, tem-se o modelo ARMAX, Equação (17).

As Figuras 6 e 7 mostram os gráficos dos resultados da estimação utilizando o modelo AR.

A Figura 6 descreve o modelo AR estimado sem o uso do vetor resíduo ξ . A equação obtida para esta estimação foi:

$$y(k) = 5,024 \times 10^{-1} y(k-1) + 5,024 \times 10^{-1} y(k-2) \quad \text{Eq. (19)}$$

Normalmente, em modelos AR não se utiliza o vetor de resíduos da estima-

ção. Entretanto esta aplicação o utilizou para comparar as estimações sem e com o vetor ξ . A Figura 7 descreve a estimação utilizando ξ . A equação estimada para essa dinâmica foi:

$$y(k) = 5,024 \times 10^{-1}y(k-1) + 5,024 \times 10^{-1}y(k-2) + \xi(k) \quad \text{Eq. (20)}$$

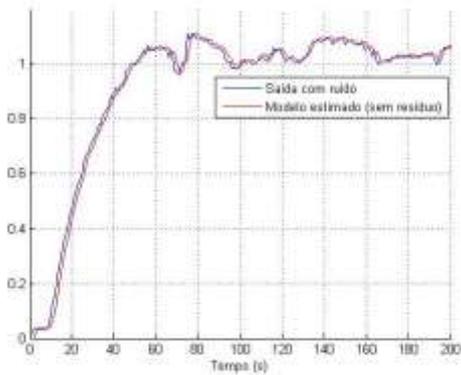


Figura 6. Identificação utilizando ERVI para um modelo AR sem resíduo.

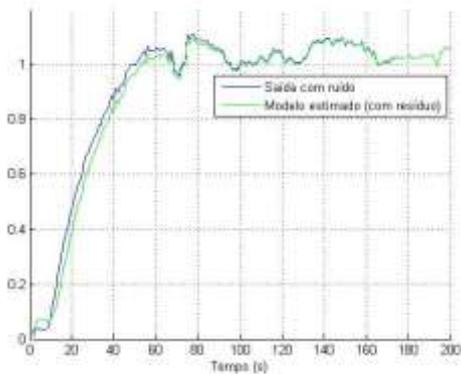


Figura 7. Identificação utilizando ERVI para um modelo AR com resíduo.

Pelos gráficos, pode-se observar uma diferenciação entre os dois modelos, principalmente na região transitória da resposta. A função custo J para o modelo da Equação (19) foi $J = 0,1074$, já para o modelo da Equação (20) foi $J = 0,1827$. Ou seja, o uso do resíduo no modelo AR relativamente tonou pior a estimação.

A mesma comparação foi realizada utilizando o modelo ARX. As Figuras 8 e 9 mostram os resultados obtidos para o modelo da Equação (16).

A equação de estimação da Figura 8 é:

$$y(k) = 2,7 \times 10^{-3}y(k-1) + 2,7 \times 10^{-3}y(k-2) + 2,7 \times 10^{-3}u(k-1) + 2,7 \times 10^{-3}u(k-2) \quad \text{Eq. (21)}$$

Já com o uso do vetor resíduo:

$$y(k) = 2,7 \times 10^{-3}y(k-1) + 2,7 \times 10^{-3}y(k-2) + 2,7 \times 10^{-3}u(k-1) + 2,7 \times 10^{-3}u(k-2) + \xi(k) \quad \text{Eq. (22)}$$

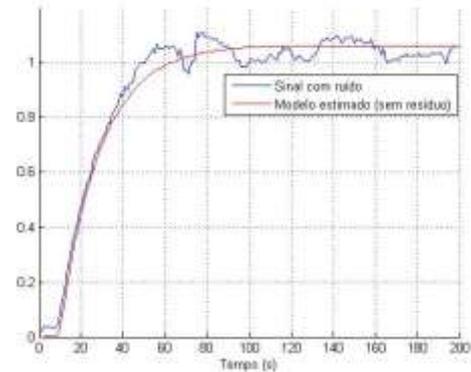


Figura 8. Identificação utilizando ERVI para um modelo ARX sem resíduo.

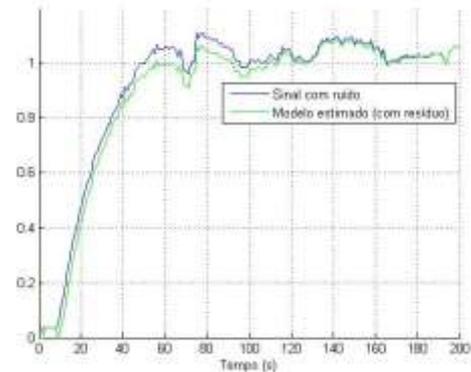


Figura 9. Identificação utilizando ERVI para um modelo ARX com resíduo.

A estimação pelo modelo ARX proposto pela Equação (21) não obteve êxito pela amenização ocorrida do ruído na estimação, sendo a função custo igual a $J = 0,3453$. Já para o modelo proposto pela Equação (22), com a adição do vetor ξ , o mesmo modificou a estimação, diminuindo a função custo para $J = 0,2538$.

O gráfico da Figura 10 mostra o resultado da estimação para o modelo ARMAX.

Para a estimação ARMAX a equação do sistema proposto é:

$$y(k) = 2,7 \times 10^{-3}y(k-1) + 2,7 \times 10^{-3}y(k-2) + 2,7 \times 10^{-3}u(k-1) + 2,7 \times 10^{-3}u(k-2) + \xi(k)$$

Eq. (23)

A função custo para o modelo da Equação (23) foi de $J = 0,2544$.

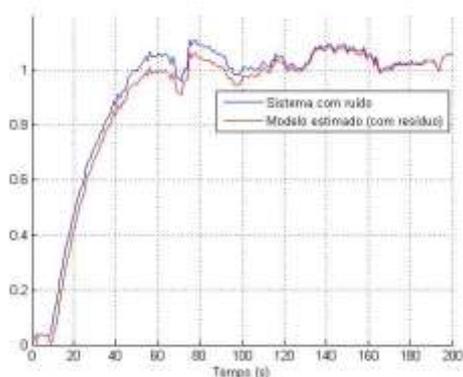


Figura 10. Identificação utilizando ERVI para um modelo ARMAX.

Para a utilização do ERVI, dentre os modelos discretos utilizados, o que apresentou melhor estimação foi o modelo auto regressivo (AR) sem a utilização do resíduo. Quando utilizou-se o vetor ξ , o modelo AR teve um maior custo na estimação. Diferentemente do modelo AR, o modelo ARX obteve uma melhor estimação quando utilizou-se do vetor de resíduos, entretanto não obteve a mesma eficiência do modelo AR com resíduo. Já o modelo ARMAX teve aproximadamente o mesmo custo da estimação pelo modelo ARX com resíduo, já que ambos apresentaram o mesmo modelo.

b) Estimador Recursivo de Aproximação Estocástica (ERAE)

Na estimação através do ERAE, utilizaram-se os mesmos dados de saída para os modelos propostos pela Equação (15), (16) e (17). Como o ERAE utiliza o vetor γ para calcular o vetor de parâ-

metros estimados, necessita-se determinar o valor de C e de α da Equação (14).

Para o caso amostrado nas Figuras 11 e 12, os valores de C e de α foram, respectivamente, 0,098 e 0,7628. Com esses valores, o modelo AR sem resíduo, Figura 11, apresentou um custo $J = 0,1071$. Percebe-se pela Figura 12 que ao adicionar o vetor de resíduos ao modelo, a estimação, para os mesmos valores de C e α , tornou-se inadequada, apresentando um custo $J = 34,2405$.

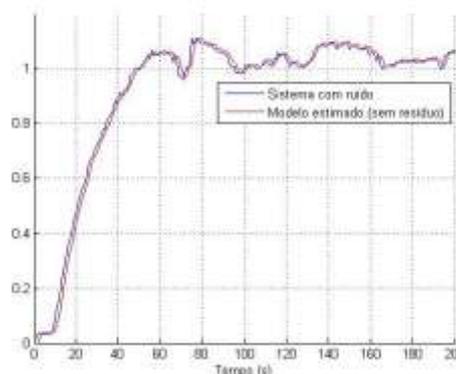


Figura 11. Identificação utilizando ERAE para o modelo AR sem resíduo.

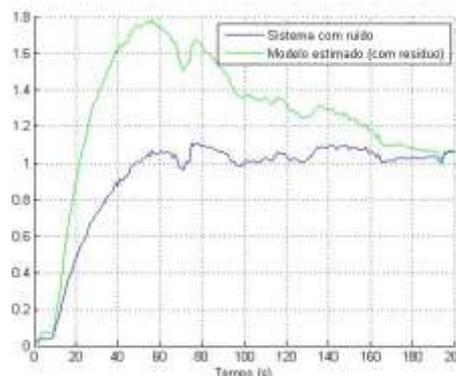


Figura 12. Identificação utilizando ERAE para o modelo AR com resíduo.

Realizando modificações aleatórias no valor de γ , obteve-se para o modelo AR o gráfico da Figura 13.

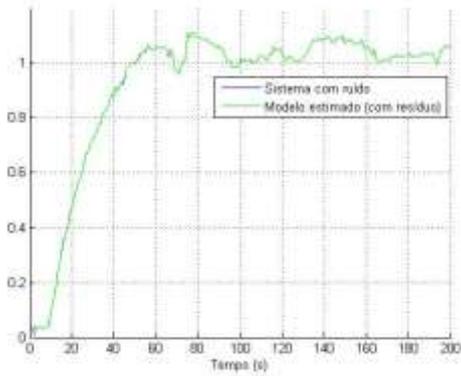


Figura 13. Identificação utilizando ERAE para o modelo AR com resíduo, modificando o valor de γ .

Ao modificar os valores de C e α para 1×10^{-4} e 1, respectivamente, observa-se na Figura 13 uma melhora na estimação, tendo um custo $J = 0,0017$, tornando-se bastante eficiente a determinação de um modelo.

Para as estimções das Figuras 11 e 13, os modelos que correspondem à modelagem são, respectivamente:

$$y(k) = 5,046 \times 10^{-1}y(k-1) + 5 \times 10^{-1}y(k-2) \quad \text{Eq. (24)}$$

$$y(k) = 2,090 \times 10^{-1}y(k-1) + 2,068 \times 10^{-1}y(k-2) + \xi(k) \quad \text{Eq. (25)}$$

Para o modelo ARX, os resultados obtidos para as melhores estimções estão amostrados nas Figuras 14 e 15, sem e com resíduo, respectivamente.

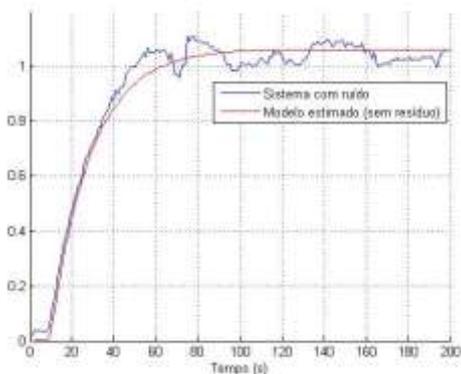


Figura 14. Identificação utilizando ERAE para o modelo ARX sem resíduo.

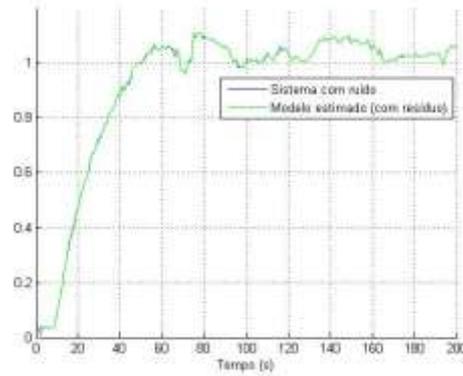


Figura 15. Identificação utilizando ERAE para o modelo ARX com resíduo.

A Figura 14 representa a estimação utilizando o modelo ARX sem o vetor de resíduo. Para determinar o valor do vetor γ utilizou-se $C = 1 \times 10^{-6}$ e $\alpha = 0,5577$. A estimação ARX sem resíduo apresentou custo $J = 0,3480$ e o modelo matemático estimado foi:

$$y(k) = 1,4497 \times 10^{-5}y(k-1) + 1,4404 \times 10^{-5}y(k-2) + 2,7 \times 10^{-3}u(k-1) + 2,7 \times 10^{-3}u(k-2) \quad \text{Eq. (26)}$$

Com a adição do vetor ξ no modelo ARX, obteve-se uma estimação melhor como pode-se observar na Figura 15. O vetor γ foi determinado por $C = 1 \times 10^{-8}$ e $\alpha = 1$, obtendo assim um custo $J = 0,0017$. O modelo matemático para este caso é:

$$y(k) = 2,0897 \times 10^{-8}y(k-1) + 2,0676 \times 10^{-8}y(k-2) + 3,8984 \times 10^{-6}u(k-1) + 3,8583 \times 10^{-6}u(k-2) + \xi(k) \quad \text{Eq. (27)}$$

Realizando a estimação para o modelo ARMAX, o gráfico da melhor estimação está na Figura 16, com o vetor γ determinado por $C = 1 \times 10^{-8}$ e $\alpha = 1$ e função custo $J = 0,0017$. O modelo matemático para esta estimação encontra-se na Equação (28).

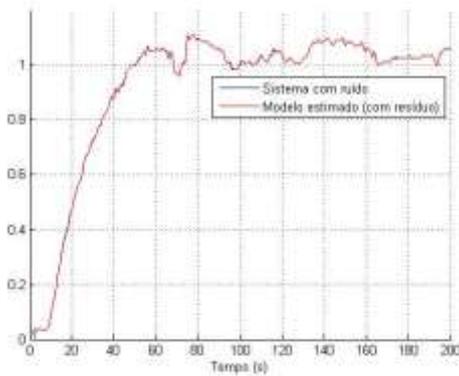


Figura 16. Identificação utilizando ERAE para o modelo ARMAX.

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 2,0897 \times 10^{-8}y(k-1) \\
 & + 2,0676 \times 10^{-8}y(k-2) \\
 & + 3,8985 \times 10^{-6}u(k-1) \\
 & + 3,8583 \times 10^{-6}u(k-2) \\
 & - 1,5810 \times 10^{-12}\xi(k-1) + \xi(k)
 \end{aligned}$$

Eq. 28

Para o caso do ERAE, os três modelos discretos estimados com o vetor de resíduo ξ obtiveram a mesma estimação de acordo com a função custo J . Entretanto, quanto a maior complexidade do modelo, menor são os valores dos coeficientes da equação. Os valores de C e de α determinados nas estimções recursivas de aproximação estocástica foram encontrados a partir do princípio de que $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$, ou seja, determinaram-se valores pequenos que satisfizessem a característica de convergência da estimação e a partir de simulações os melhores valores foram encontrados. Para valores menores do que os ditados neste artigo a mudança do índice de convergência do sistema torna-se desprezível.

7. CONCLUSÕES

O objetivo deste artigo foi modelar uma planta didática de monitoração e controle de fluxo utilizando modelos discretos e comparando dois estimadores recursivos, o Estimador Recursivo de Variáveis Instrumentais (ERVI) e o Estimador Recursivo de Aproximação Estocástica (ERAE). A partir dos algoritmos desenvolvidos no *MATLAB*[®], os vetores θ foram estimados e assim determinados os modelos matemáticos que representassem a dinâmica do sistema.

Para o ERVI, o modelo AR sem resíduo apresentou-se mais adequado na

estimação de acordo com o cálculo da função custo J . Os outros métodos apresentaram funções custo maiores. Já para o ERAE, os três modelos discretos com adição do vetor resíduo ξ obtiveram os mesmos valores para a função custo. A Tabela I apresenta os valores das funções custo para cada modelo e técnica de identificação.

Comparando as duas técnicas, o ERAE apresentou-se mais eficiente na determinação do modelo matemático. Além de apresentar uma função custo com valores menores, a vantagem da utilização do ERAE em relação ao ERVI está no esforço computacional maior que a segunda técnica apresenta para determinar a matriz M . Esta determinação que não ocorre quando se utiliza a técnica ERAE, pois esta técnica foi elaborada quando a limitação de tempo de computação é crítico, que não é caso aqui estudado já que as estimções foram realizadas off-line. Observa-se ainda que a planta didática estudada não apresenta complexidade na sua dinâmica, sendo uma das explicações para que os métodos mais complexos sejam menos eficientes do que os métodos mais simples.

Tabela I. Valores das funções custo J para cada modelo e técnica utilizada na estimação.

MODELO	FUNÇÃO CUSTO J	
	ERVI	ERAE
AR	0,1074	0,1071
	0,1827*	0,0017*
ARX	0,3453	0,3480
	0,2538*	0,0017*
ARMAX	0,2544	0,0017

* Valores obtidos na estimação usando o modelo com o vetor de resíduos.

8. REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. (2007). “Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais”. 3ª Edição. Belo Horizonte: Editora UFMG.

LJUNG, L. (1999). “System Identification: Theory for the User”. 2nd Edition. New Jersey: Prentice Hall PTR.

LJUNG, L. (1977). "Analysis of recursive stochastic algorithms". IEEE Transactions on Automatic Control, 22:539-551.

LJUNG, L.; SÖDERSTRÖM, T. (1983). "Theory and Practice of Recursive Identification". Massachusetts: The MIT Press.

SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. (1989). "System Identification". Cambridge: Prentice Hall.

WALTER, E; PRONZATO, L. (1997). "Identification of Parametric Models: from Experimental Data". Paris: Springer.

YOUNG, P. C. (1970). "An Instrumental variable method for real-time identification of a noisy process". Automatica, 6:271:287.