

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA – UMA APLICAÇÃO

PROBLEM SOLVING IN MATHEMATICS – AN APPLICATION

Renata Paixão Coutinho¹, Augusto Cesar de Castro Barbosa², Cláudia Ferreira Reis Concordido³, Marcus Vinicius Tovar Costa⁴

¹PROFMAT-UERJ, re.coutinho@bol.com.br

²IME-UERJ, accb@ime.uerj.br

³IME-UERJ, concordido@ime.uerj.br

⁴IME-UERJ, mvtc@uerj.br

RESUMO

Este trabalho aborda a metodologia de resolução de problemas como uma forma de tornar o ensino da Matemática mais atraente e efetivo. Buscamos com isso fornecer ao professor elementos que possam contribuir para que o aluno esteja mais capacitado para resolver problemas, não só de Matemática como do seu dia a dia. São apresentados a base metodológica dessa proposta e um breve histórico sobre o ensino da Matemática no Brasil. Como ilustração da aplicação do método de resolução de problemas, é apresentada parte de uma experiência realizada em uma escola do município de Niterói-RJ, em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, abordando o tema Equação do 2º Grau, a partir de um problema, através de diferentes formas de resolução.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Ensino de Matemática, Equação do segundo grau.

ABSTRACT

This work presents the methodology of solving problem as a way of making the teaching of Mathematics more attractive and effective, providing the teacher with elements that can contribute to the student's ability to solve not only Mathematics' problems but of his daily lives either. We present the methodological basis of this proposal and a brief history on the teaching of Mathematics in Brazil. As an example of the application of the problem-solving method, it is shown part of an experiment carried out at a 9th grade classe of elementary school in the city of Niterói-RJ, addressing the theme Second Degree equation, from a problem, making use of several methods of resolution.

Key words: Problem Solving, Mathematics Teaching, Quadratic Equation.

INTRODUÇÃO

Em geral, a Matemática não é a disciplina preferida da maioria dos alunos. Ela é considerada difícil, e isso se torna uma preocupação para professores, coordenadores e diretores das escolas. Isso demanda investigações para saber o motivo dessa dificuldade, e quando isso é feito, o que se encontra, muitas vezes, são alunos desmotivados, ou por não saberem em que situação prática aplicarão o conteúdo que estão estudando, ou por terem professores que não incentivam uma relação positiva com a Matemática. Por

vezes, alguns professores preferem reafirmar a dificuldade na disciplina a torná-la mais simples e agradável aos alunos.

Segundo Silva (2005, p. 9), “a presença da Matemática na escola é uma consequência de sua presença na sociedade e, portanto, as necessidades matemáticas que surgem na escola deveriam estar subordinadas às necessidades matemáticas da vida em sociedade”. Com o objetivo de refletir sobre alguns dos aspectos que normalmente dificultam a aprendizagem da Matemática, o autor pontua seis questões: pré-conceito de que a Matemática é difícil; formação inadequada dos professores; uso da metodologia tradicional; busca inadequada de novos recursos pedagógicos; falta de contextualização; dificuldades no uso da linguagem matemática.

A Matemática não está apenas em um exemplo do livro didático, ela também aparece nos fenômenos naturais, no avanço tecnológico, nas ciências exatas e até mesmo nas artes. Em contrapartida, existe a Matemática da escola, em que as ideias matemáticas acabam ficando dentro da sala de aula, sem estabelecer um vínculo com o mundo fora dela. Sob essa visão, esta é uma disciplina para executar cálculos e decorar fórmulas. É válido ressaltar que muitas crianças que apresentam dificuldades com a disciplina em sala de aula, quando colocadas em uma situação do dia a dia, em que precisam da Matemática, conseguem se superar e se sair bem daquele conflito. Isso acontece porque fora da escola, não há a cobrança do cálculo formal e a criança pode fazer as operações mentalmente e se expressar verbalmente. No entanto, não estamos sugerindo com isso que a aplicação de regras seja deixada de lado pelas escolas, mas que possa se dar mais ênfase na sua aplicabilidade em situações cotidianas.

Conforme Onuchic e Allevato (2004) pontuam, a Matemática é uma área do conhecimento que surgiu e tem se desenvolvido a partir dos problemas que a humanidade encontra. Dessa maneira, a resolução de problemas deve ocupar um papel de destaque no ensino da Matemática. Em sua aprendizagem, os problemas são fundamentais, pois colocam o aluno em uma posição onde ele pode pensar por si próprio, criar questionamentos e até mesmo desenvolver o raciocínio lógico, e não apenas usar padrões e regras. Por esses motivos, para o ensino da Matemática acontecer através da resolução de problemas, não basta que o professor tenha o conhecimento do conteúdo, é necessário também criatividade para fazer com que os alunos participem das atividades propostas.

O objetivo desse trabalho é abordar o papel da resolução de problemas em Matemática. Ao apresentarmos a fundamentação teórica sobre o tema, incluímos uma

abordagem histórica sobre o ensino da Matemática, bem como as estratégias para a resolução de problemas e ainda uma análise dos papéis do aluno e do professor no processo de ensino e aprendizagem com essa metodologia.

O tópico escolhido para se trabalhar em sala de aula com a resolução de problemas foi equações do 2º grau. Esse conteúdo é apresentado aos alunos no 9º ano do Ensino Fundamental. Em grande parte das escolas, aprender sobre equações do 2º grau se resume a conhecer a fórmula de Bhaskara¹ e aplicá-la. Abordaremos o tema utilizando métodos não convencionais de resolução das equações, como o método de completar quadrados e o método geométrico de Al-Khwarizmi².

Os tópicos presentes na unidade do livro didático adotado que abordava as equações do 2º grau foram introduzidos por um problema motivacional, isto é, a cada assunto estudado na unidade, uma situação foi elaborada de modo que a sua modelagem matemática pudesse satisfazer tal contexto. Apresentaremos três dos problemas que fizeram parte das atividades desenvolvidas nas aulas.

ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA

Os estudos sobre o ensino da Matemática tornaram-se mais frequentes a partir do início do século XX, especialmente depois da criação da *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), presidida pelo matemático alemão Felix Klein³, que iniciou estudos sobre o ensino da Matemática na escola secundária em vários países (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004). No Brasil, até a década de 1920, a Matemática estava dividida em várias disciplinas isoladas e, apenas a partir da década de 1930, elas passaram a formar a disciplina chamada Matemática (GODINHO, 2016).

Nas primeiras décadas do século XX, no ensino da Matemática, era dada uma grande ênfase na repetição, na memorização e no treinamento. Os alunos resolviam exercícios de forma repetitiva para fixar os conceitos. Havia uma visão estreita quanto à prática da resolução de problemas. Ensinar a resolver problemas significava apresentá-los, juntamente com uma técnica específica para a sua resolução (ONUCHIC, 2013). Já em meados do século XX, começou-se a falar em resolução de problemas como

¹ Bhaskara Akaria (1114 – 1185) é considerado o mais importante matemático indiano do século XII.

² Muḥammad ibn Mūsā al-Khwarizmi (780 – 850), matemático persa, considerado um dos fundadores da álgebra. Devido às suas grandes contribuições, a palavra “algarismo” deriva de seu nome.

³ Felix Klein (Alemanha, 1849 – 1925), matemático e professor que desenvolveu trabalhos em geometria não-euclidiana e teoria de grupos. Dedicou-se principalmente à modernização do ensino da Matemática em todo o mundo.

metodologia. O nome de George Polya⁴ surge como referência nesse assunto, porém, a aplicação dessas novas ideias dependeria dos professores que, em geral, naquele momento, não estavam preparados para tal tarefa.

Na década de 1960, surge o movimento da Matemática Moderna, que se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino de Matemática. Nesse momento, não houve avanços significativos nos trabalhos e pesquisas em resolução de problemas. Porém, na década de 1970, ainda durante o período do movimento da Matemática Moderna, alguns estudos começaram a ser feitos sobre a resolução de problemas e suas implicações curriculares.

Uma falta de concordância sobre três tipos de concepção surgiu. Seria ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para a resolução de problemas ou ensinar por meio da resolução de problemas? Os autores Schroeder e Lester (1989 apud ONUCHIC, 1999 p.206-7) apresentaram essas três formas de utilizar a resolução de problemas. Primeiramente, ensinar sobre resolução de problemas tem como objetivo resolver problemas. Para ajudar os alunos nessa tarefa, pode-se utilizar o método de quatro fases sugerido por Polya, que explanaremos adiante.

Por outro lado, ensinar para resolução de problemas ressalta a valorização do desempenho e das estratégias dos alunos. Aqui, a resolução de problemas é tida como um processo e há a preocupação em desenvolver no aluno a capacidade de transpor o que aprende de um contexto para outro. Por fim, ao ensinar por meio da resolução de problemas, tem-se a resolução de problemas como um ponto de partida, onde o problema desencadeia o processo de construção do conhecimento. O professor deve saber quais são os conhecimentos anteriores nos quais os alunos têm deficiência, para que essas lacunas possam ser preenchidas, mas a falta de conhecimento prévio não pode limitar o aluno na aquisição de novos conhecimentos.

Sem dúvida, este último constitui-se num caminho para se ensinar Matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nesse trabalho, basearemos nosso estudo nesse último modo de concepção.

Em 1980 nos Estados Unidos, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publicou o documento *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's*, cuja primeira recomendação traz a resolução de problemas

⁴ George Polya (Hungria, 1887- EUA, 1985), matemático e professor que se dedicou especialmente ao estudo da resolução de problemas de Matemática. Trabalhou ainda numa grande variedade de tópicos, que incluíam teoria dos números, combinatória e teoria das probabilidades.

para o foco da matemática escolar nos anos 80. O NCTM (1989, 1991, 1995 – 2000) apresenta a resolução de problemas como o primeiro passo de um processo, que é seguido de raciocínio e prova, comunicação, conexões e representações (ALLEVATO, 2008).

No final do século XX e início do século XXI, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) surgem no Brasil, apresentando uma proposta sobre como trabalhar a resolução de problemas nas aulas de Matemática. De acordo com esse documento, a resolução de problemas pode ser vista como ponto de partida da atividade matemática em oposição à simples execução de procedimentos e ao acúmulo de informações, uma vez que possibilita aos estudantes a mobilização dos conhecimentos e o gerenciamento das informações que estão ao seu alcance. Ainda segundo os PCN (BRASIL, 1998), a opção por organizar o trabalho pedagógico a partir da resolução de problemas “traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução”.

A abordagem da Matemática através da resolução de problemas pode influenciar na formação de cidadãos mais críticos e independentes, pois desenvolve no aluno a capacidade do pensar logicamente. Dessa forma, o aluno se torna um ser participante na sua própria aprendizagem, isto é, ele cria métodos e estratégias de resolução de problemas, não se restringindo a metodologias mais tradicionais, em que há o predomínio de exercícios rotineiros e desinteressantes e que valorizam o aprendizado por treinamento e memorização.

Atualmente, a maioria dos alunos aprende a resolver problemas matemáticos. Em contrapartida, a resolução de problemas vem contribuindo para o fracasso escolar. Essas duas frases podem gerar certa confusão, mas o “fracasso escolar” citado acontece, pois os alunos apresentam dificuldades consideráveis na interpretação dos enunciados. Quando um problema é proposto, eles fazem a leitura do texto, porém não conseguem transformar aquele enunciado em uma sentença matemática, ou seja, a maioria dos alunos não é capaz de modelar um problema.

Outra questão pertinente é que os “problemas” discutidos em sala de aula, muitas vezes, não deixam de ser meros exercícios de repetição disfarçados de problemas, para fixar os conteúdos que acabaram de ser trabalhados. Para resolvê-los, basta usar uma sequência de procedimentos padronizados e que, se forem memorizados, poderão ser utilizados na resolução de outros problemas semelhantes. Esse tipo de

atividade não faz com que o aluno desenvolva a capacidade de transpor o raciocínio utilizado para o estudo de outros assuntos.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Sob o ponto de vista do professor, ensinar os alunos a resolver problemas não significa somente dotar o aluno de habilidades e estratégias eficazes para lidar com questões matemáticas. Na verdade, significa também criar nesses alunos hábitos e atitudes de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta.

Já sob o ponto de vista dos alunos, aprender a resolver problemas não é apenas uma questão de encontrar a sua solução. Além disso, é preciso também saber propor os problemas para si mesmos e fazer com que esse problema seja solucionado, ou seja, que se deseje encontrar a sua solução. Para isso, o problema tem que ser investigado, questionado, estudado e resolvido, pois o verdadeiro objetivo da aprendizagem da solução dos problemas é fazer com que os alunos sejam capazes de propor problemas e resolvê-los como forma de amadurecer a aprendizagem.

Alguns fatores podem dificultar a resolução dos problemas. Para exemplificar, podemos citar uma redação ruim, isto é, quando o texto não está claro o suficiente para o aluno ou quando as informações dão margem a dois ou mais tipos de interpretação; um ponto de partida obscuro, ou seja, quando o aluno não sabe por onde começar ou o que tem que fazer primeiro para solucionar o problema; e uma dificuldade nas etapas da resolução, ou seja, quando as regras que estipulam os passos necessários para a resolução do problema não se encontram bem formuladas.

Presentes ou não estes fatores que dificultam a resolução, faz-se necessário que a resolução de qualquer problema acompanhe alguns requisitos básicos como prestar atenção em todos os dados fornecidos, recordar alguns conhecimentos já estudados e relacionar entre si certos conceitos. Na maioria dos problemas estes elementos fazem parte de habilidades necessárias que levarão ao resultado.

No contexto da educação matemática, professores e pesquisadores da área atribuem cada vez mais relevância a esta metodologia. De acordo com os argumentos citados até aqui, fica evidente a dificuldade em despertar no aluno o gosto pela resolução de problemas. Diversos obstáculos e momentos de dificuldade surgirão. Isto

acontece porque professores e alunos, em geral, não conseguem diferenciar um problema matemático de um exercício matemático. Vamos distinguir um problema de um exercício, usando definições de alguns autores.

Segundo Dante (1991, p. 9-10), “problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la”, isto é, problema é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido. De acordo com Onuchic (1999, p. 215), “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas se está interessado em resolver”. Já Polya (1978) e Romanatto (2012) encaram um problema matemático como uma situação na qual é necessária a busca de uma sequência de ações a fim de alcançar um objetivo previamente definido: construir sua solução.

Em contrapartida, temos que exercício, segundo Silveira (2001 apud SOUSA, 2005, p. 4), “é uma atividade de treinamento no uso de alguma habilidade/conhecimento matemático já conhecido pelo resolvidor, como a aplicação de um algoritmo conhecido, de uma fórmula conhecida”. Dessa maneira, podemos afirmar que os alunos estão diante de um exercício quando a única exigência é a aplicação de um procedimento, ou seja, não há a necessidade de criação de estratégias para solucioná-lo.

Os professores, em suas respectivas salas de aula, devem mostrar aos alunos que exercícios e problemas são tarefas distintas. É preciso que, aos alunos, fique evidente que as atividades não devem se resumir a exercícios repetitivos, mas abranger a miscelânea dos vários tipos de conhecimentos que envolvem diferentes atitudes, motivações e conceitos.

Porém, ao resolver um mesmo problema por diversas vezes, este poderá se tornar um exercício para o aluno. Assim, fica difícil determinar se uma atividade dada pelo professor em aula pode ser considerada um exercício ou um problema para aquele aluno. Essa definição vai depender da experiência do aluno, dos conhecimentos anteriormente adquiridos por ele e dos objetivos que se definem durante a realização da tarefa.

Com isto, o ensino de Matemática se torna mais atrativo para o aluno quando problemas desafiadores e significativos são propostos nas aulas, ao invés de exercícios que trazem situações que se distanciam do contexto do aluno e que remetem à memorização de fórmulas. Acreditamos assim que, se o problema proporcionar ao aluno o gosto pela descoberta da resolução, ele terá interesse nas atividades matemáticas, pois a sua curiosidade, criatividade e agilidade de raciocínio estarão sendo estimuladas e, com isso, o aluno estará adquirindo conhecimento matemático.

ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Será que um problema está resolvido quando se encontra a sua solução? Ou ainda, será que para resolver um problema é preciso chegar à resposta dele? Acreditamos que a resposta para ambas as perguntas é não, ou seja, um problema não está necessariamente resolvido quando se encontra a solução. Para garantir que o problema esteja resolvido é preciso saber o que foi usado e como foi usado. Em outras palavras, é necessária a plena compreensão das etapas de resolução do problema.

Diante do objetivo de resolver problemas, George Polya (POLYA, 1978) sugere um método de resolução de problemas dividido em quatro fases, a saber: compreender o problema; estabelecer um plano; executar o plano; fazer o retrospecto ou verificação, nesta ordem.

Para cumprir a primeira fase, isto é, para compreender um problema, o aluno pode utilizar diversas estratégias, tais como, fazer perguntas para si mesmo, construir uma figura que esquematize a situação proposta ou ainda passar para a notação matemática aquilo que foi dado na linguagem usual. As perguntas citadas podem ser: “O que está sendo perguntado?”, “Quais são as informações dadas?”, “Elas são suficientes para se encontrar a solução?”, “Quais estratégias posso usar para descobrir os dados desconhecidos?”, “Quais são os cálculos que precisarei efetuar para resolver o problema?”.

Na segunda fase fica determinada a necessidade de se estabelecer um plano, ou seja, o aluno terá que buscar conexões entre os dados fornecidos, os dados omitidos e o que é perguntado. Para isso, ele terá que pensar em fórmulas e/ou algoritmos que poderão ser aplicados, estabelecer prioridades e, com tudo isso definido, o aluno poderá elaborar um plano.

A terceira fase consiste em realizar o plano elaborado. Se as etapas anteriores foram bem desenvolvidas, esta, provavelmente, se tornará a etapa mais fácil do processo, mas nem por isso o aluno pode se descuidar. Cada procedimento deve ser realizado com muita cautela, para não haver erros simplórios e assim se chegar a um resultado incorreto.

A última fase desse método é a verificação da resposta obtida na etapa anterior. Primeiramente, deve ser feita uma reflexão sobre a solução encontrada e uma análise se a resposta faz sentido para aquela situação proposta. Em seguida, segundo Sousa (2005, p. 8), o aluno deve retomar o processo desenvolvido “procurando descobrir a essência do problema e do método empregado para resolvê-lo, de modo a favorecer uma

transposição do aprendizado adquirido neste trabalho para a resolução de outras situações-problema”.

O método de Polya é um método de resolução de problemas matemáticos, mas ele não descreve as etapas para resolvê-lo. Esse passo a passo seria uma técnica de resolução de problemas. Técnica é a maneira de fazer algo, enquanto método é a maneira de pensar algo. Dessa forma, pode-se dizer que o método de Polya ensina a pensar o problema de modo a descobrir a solução, ou seja, a técnica que vai fazer com que o problema seja resolvido.

Com o objetivo de resolver problemas, os alunos se utilizam de diferentes estratégias para cumprir tal tarefa. Furlanetto, Dullius e Althaus (2012) citam cinco exemplos desses artifícios: tentativa e erro; busca por padrões; resolução de um problema mais simples; trabalhar em sentido inverso, partindo da resposta, e simulação, a partir de uma situação prática.

Podemos ainda acrescentar mais duas estratégias que também são usadas pelos alunos, o recurso do desenho e o cálculo formal. O uso do desenho pode ajudar o aluno na interpretação do problema, ou ainda pode ser uma estratégia no registro da solução. Vale ressaltar que o desenho pode fornecer ao professor pistas sobre como o aluno pensou e agiu para solucionar aquele problema. A utilização do cálculo formal é a principal estratégia de resolução de problemas para a maioria dos alunos. Acreditamos que isso aconteça, pois, desde a Educação Infantil, é exigida do aluno a apresentação do cálculo formal na resolução de problemas e, com o passar dos anos escolares, ele se acostuma com isso e passa a acreditar que essa estratégia de resolução de problemas é a mais adequada.

O método de resolução de problemas esquematizado por Polya pode ser usado por alunos, mas principalmente por professores. O aluno utiliza o método das quatro fases para resolver os problemas matemáticos, enquanto o professor o usa para ensinar o aluno a pensar a resolução dos problemas. Em sua obra, ele registra diversos conselhos para o professor, o que deixa a impressão que está muito mais preocupado com o professor do que com o aluno. Pode-se afirmar que a sua preocupação com o aluno se expressa por meio de esforços em apresentar ao professor uma melhor maneira de ensinar seus alunos a resolver problemas.

Outro ponto importante é que, embora destinado a problemas matemáticos, o método de resolução de problemas elaborado por Polya não se resume a eles. Isso não

fica evidente em nenhum momento da leitura do seu livro, mas é possível perceber que podemos aplicá-lo em outras áreas da ciência e até mesmo em situações cotidianas.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA SALA DE AULA

A introdução de um novo conteúdo matemático pode ser feita através da resolução de problemas. Para isso, os professores escolhem uma situação em que o conceito a ser trabalhado na aula seja tema central do problema selecionado. Assim, o problema é o desencadeador da atividade matemática, e não o fim do processo. Na relação de ensinar e aprender definições, propriedades e métodos matemáticos, a exploração de problemas se torna um caminho de abordagem, ou seja, se torna necessário que o aluno desenvolva algum tipo de estratégia para resolver a situação proposta.

Concordamos com Romanatto (2012, p. 302), quando ele diz que

Se a sequência “definições, propriedades, exercícios e problemas” era habitual do ensino da Matemática e com o agravante dos exercícios e dos problemas terem ênfase nos aspectos envolvendo regras, fórmulas e algoritmos, a proposta metodológica da resolução de problemas faz uma inversão significativa, qual seja, “problemas, definições, propriedades, exercícios e novos problemas”. Propomos o problema como o centro ou o início do processo de ensinar e de aprender Matemática e isso pode ser decisivo para essa disciplina adquirir um sentido para os estudantes.

Ainda de acordo com esse autor, é possível concluir que

Solucionar problemas não é apenas buscar aprender Matemática e, sim, fazê-la. Os estudantes deveriam ter oportunidades frequentes para formular, tentar e solucionar problemas desafiadores que requerem uma quantidade significativa de esforço e deveriam, então, ser encorajados a refletir sobre seus conhecimentos (ROMANATTO, 2012, p. 302-3).

Nessa mesma direção, o problema deve ser o ponto de partida e, de acordo com Onuchic (1999, p. 215), “os professores, através da resolução de problemas, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática gerando novos conceitos e novos conteúdos”.

Segundo Van de Walle (2001 apud FERNANDES e OLIVEIRA, 2015 p. 4), “ensinar Matemática através desta metodologia, não significa dar o problema, sentar-se e esperar que aconteça uma mágica. É necessária a criação de um espaço matemático em que todos se sintam motivados no transcorrer de cada aula”.

Onuchic e Allevato (2004, p. 221) afirmam que para criar esse espaço ideal ao aprendizado, toda aula deve compreender três momentos importantes: antes, durante e depois. Cada uma dessas etapas está descrita a seguir.

- Antes: o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras.
- Durante: os alunos trabalham e o professor observa e avalia esse trabalho.
- Depois: o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos.

Com o objetivo de tornar o trabalho de sala de aula mais dinâmico, Allevato e Onuchic (2014, p. 44-46) desenvolveram um roteiro composto por uma sequência de dez atividades, em que essa metodologia é usada para o ensino de Matemática, que elencamos a seguir.

1. Proposição do problema – selecionar ou elaborar um problema, que se denomina problema gerador.
2. Leitura individual – distribuir uma cópia impressa do problema para cada aluno e solicitar a leitura do mesmo.
3. Leitura em conjunto – separar a turma em pequenos grupos e solicitar uma nova leitura do problema.
4. Resolução do problema – a partir do momento em que o aluno entende o problema, ele tenta resolvê-lo, em grupo, permitindo assim a construção de conhecimento sobre o conteúdo que o professor planejou para aquela aula.
5. Observar e incentivar – nesse momento, o professor muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem.
6. Registro das resoluções na lousa – anotar os resultados obtidos pelos grupos quer sejam certos ou errados e aqueles feitos por diferentes caminhos.
7. Plenária – assembleia com todos os alunos; como todos trabalham sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados e, dessa forma, participam.
8. Busca do consenso – após discussões, e sanadas as dúvidas, o professor juntamente com os alunos tentam chegar a um consenso.

9. Formalização do conteúdo – faz-se uma síntese daquilo que se objetivava “aprender” a partir do problema gerador; são colocadas as devidas definições, identificando propriedades, fazendo demonstrações, etc.
10. Proposição e resolução de novos problemas – nesta etapa, após a formalização do conteúdo, propõem-se novos problemas para fixação dos conceitos.

O trabalho em sala de aula que faz uso da resolução de problemas estimula o aluno a encontrar um caminho para a solução, ao invés de esperar por uma resposta pronta dada pelo professor ou pelo livro didático. A resolução de problemas como metodologia de ensino da Matemática, pode fazer com que as definições e as ideias matemáticas fiquem mais compreensíveis para o aluno, dado que são obtidas, criadas e investigadas de maneira ativa e significativa.

Em geral, seguindo a forma tradicional de ensino, o aluno acredita que a Matemática é um conjunto de conceitos inquestionáveis e, por vezes, incompreensíveis. Dessa forma, a Matemática passa a ser tratada como uma verdade absoluta e que foi criada por gênios. Assim, o aluno se distancia da Matemática e passa a se sentir incapaz de aprender tal conteúdo. Ele acaba perdendo também a sua intuição matemática para questões do cotidiano.

Os alunos também acreditam que os problemas matemáticos das aulas não se relacionam com os problemas matemáticos da vida real. Assim, a maneira como se resolve um problema “da escola” é diferente da que se resolve um problema fora dela.

A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1998, p.40).

Além disso, é fundamental que o aluno seja visto como construtor do seu próprio conhecimento. Conforme enfatizam os PCN,

O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos — que admitem diferentes respostas em função de certas condições — evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não

pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 1998 p. 42).

O ato de ensinar, geralmente, começa onde os professores se encontram, mas na verdade deveria sempre começar onde os alunos se encontram. Dessa maneira, estariam sendo considerados os conhecimentos que cada aluno traz consigo, porém não é assim que acontece em muitas das salas de aula.

Quando se opta por trabalhar em uma sala de aula utilizando o método de resolução de problemas, uma mudança de atitude deve haver também por parte do professor. Agora não são mais os alunos que perguntam para o professor responder. Os questionamentos devem partir do professor para os alunos responderem e isso o torna um mediador de conteúdos.

De acordo com Romanatto (2012, p. 303),

Cabe ressaltar que o papel do professor é essencial, pois deve propor bons problemas, deve acompanhar e orientar a busca de soluções, coordenar discussões entre soluções diferentes, valorizar caminhos distintos que chegaram à mesma solução, validando-os ou mostrando situações em que o raciocínio utilizado pode não funcionar. [...] Assim é tarefa prioritária do professor organizar, sintetizar, formalizar os conceitos, princípios e procedimentos matemáticos presentes nos problemas apresentados.

Algumas dificuldades podem surgir durante esse processo, como a questão da leitura do enunciado ou ainda a falta de familiaridade com o vocabulário e com o simbolismo matemático. O aluno precisa ser capaz de se apropriar de um conhecimento matemático utilizado em um problema, para transpor aquele mesmo raciocínio para outros problemas. Isso é fundamental na busca da solução de um problema. Ainda podemos ver em Romanatto (2012, p. 305) que “a comunicação matemática na exposição do raciocínio, que levou a resposta ao problema, precisa ser expressa para possibilitar a legitimação ou a refutação da resolução”. Assim, o professor que também resolve problemas se torna mais apto a identificar e solucionar as dificuldades dos seus alunos.

Para melhor trabalhar com a metodologia de resolução de problemas, baseando-se no roteiro apresentado por Allevato e Onuchic, o professor pode dividir a aula em três etapas. No primeiro momento, com o problema em mãos, cada aluno deve refletir sobre ele e, enquanto isso, o professor percorre as mesas ajudando, incentivando e fornecendo pequenas dicas aos alunos. Em um segundo momento, o professor solicita que os alunos formem grupos e continuem a discussão até conseguirem formalizar a

solução do problema. Por último, se estabelece o momento coletivo, em que o professor vai até o quadro para discutir com os alunos as soluções propostas pelos grupos, apontando os possíveis erros cometidos e, por fim, formalizando uma resolução aceita pela comunidade matemática.

O professor também pode e deve fazer uso das mais diversas tecnologias educacionais disponíveis como facilitadoras da aprendizagem. Alguns recursos disponíveis são livros didáticos e paradidáticos, materiais didáticos, calculadoras, jogos, computadores, *softwares* e vídeos.

Torna-se evidente que desenvolver o ensino e a aprendizagem da Matemática por meio da resolução de problemas não é uma tarefa fácil. Para essa metodologia ter êxito, é preciso que os professores estejam dispostos e preparados para esse tipo de trabalho, pois os problemas precisam ser escolhidos de maneira cuidadosa. Além disso, é necessário também observar, motivar, incentivar e ouvir os alunos na busca de soluções para esses problemas, mantendo-os sempre confiantes na própria capacidade de resolvê-los. Assim, acreditamos que a Matemática pode fazer mais sentido para os alunos nessas salas de aula onde essa metodologia é adotada.

APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

A metodologia descrita foi utilizada para se introduzir o tema equações do 2º grau – conteúdo abordado no último ano do Ensino Fundamental. O desenvolvimento desse assunto foi acompanhado em uma instituição de ensino particular, localizada no bairro de Pendotiba, município de Niterói, no estado do Rio de Janeiro. A turma é composta por 27 alunos com idades entre 14 e 15 anos.

O livro didático adotado pela escola é o Araribá Plus Matemática 9º ano, além do caderno de atividades da mesma coleção, esse último composto apenas por exercícios, que, inicialmente, são de fixação seguidos dos problemas. Nesse livro, a apresentação de um novo assunto sempre se dá através de um problema, o que se mostrou adequado ao trabalho que se pretendia desenvolver.

Para iniciar a unidade, o livro apresenta o seguinte problema: “Juliana fez um tapete para enfeitar seu quarto (Figura 1). Para fazer esse tapete, Juliana costurou, uns nos outros, retalhos de tecidos de formato quadrado, todos com as mesmas dimensões. Sabendo que o tapete ficou com 4.050 cm^2 , como podemos calcular quanto mede o lado de cada quadrado de retalho?”

Figura 1: Referente ao exemplo que introduz equações do 2º grau.



Fonte: Araribá Plus Matemática 9º ano, 2014, p. 54

Na turma, essa situação foi proposta e, sem maiores dificuldades, os alunos compreenderam que o lado de cada quadrado seria a incógnita x . Dado que o comprimento do tapete tem 10 quadrados e a largura tem 5 quadrados, as medidas dos lados do tapete serão, respectivamente, $10x$ e $5x$. Como o tapete tem formato retangular, a sua área será dada pela área do retângulo, isto é, $S = 10x \cdot 5x$. Porém, no enunciado, foi dito que essa área valia 4.050 cm^2 . Assim, podemos elaborar a seguinte equação: $10x \cdot 5x = 4050 \Rightarrow 50x^2 = 4050 \Rightarrow 50x^2 - 4050 = 0$.

Em seguida, a equação acima é apresentada como um exemplo de equação do 2º grau e, logo após, o livro traz a definição de equação do 2º grau, com incógnita x , como aquela que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Os números a , b e c são chamados coeficientes da equação, que pode ser classificada em completa ou incompleta, de acordo com os valores desses coeficientes. Então, o livro recorda que raiz de uma equação é o valor atribuído à incógnita que torna a sentença matemática verdadeira. Para finalizar essa seção, o livro traz uma série de exercícios e problemas que foram trabalhados com os alunos, além daqueles presentes no caderno de atividades.

Um vídeo do Telecurso 2000⁵ sobre o método de completar quadrados foi apresentado gradativamente e os alunos foram respondendo as perguntas do conjunto de atividades. O vídeo traz uma situação problema como motivação para a compreensão do método de completar quadrados. Outra questão que também foi debatida é a diferença entre a solução da equação e a solução do problema.

⁵ <https://www.youtube.com/watch?v=4LvnEGtrqVg>

Quando os alunos terminaram de responder as questões propostas no vídeo, eles foram desafiados a resolver duas equações utilizando, obrigatoriamente, o método de completar quadrados e a responder duas perguntas. A primeira pergunta era: “No final do vídeo, o engenheiro cita uma fórmula que facilita a resolução de uma equação do 2º grau. Que fórmula é essa?” e tinha a resposta fechada, isto é, a fórmula de Bhaskara. Já a segunda pergunta era: “Agora que você já conhece duas maneiras de resolver uma equação do 2º grau, qual método você prefere? Por quê?”. Apenas três alunos escolheram o método de completar quadrado como o preferido, o que representa aproximadamente 11% da turma. Eles alegaram que se sentem mais seguros em relação ao resultado utilizando o método de completar quadrados. Os demais preferiram a fórmula de Bhaskara e a justificativa da maioria “é que é mais rápido”.

Segue um exemplo das atividades desenvolvidas em sala de aula como continuidade do trabalho com as equações do 2º grau, para ilustrar a aplicação da resolução de problemas.

Problema: Uma sala comercial quadrada está dividida como na Figura 2. A área do escritório, do almoxarifado e da sala da secretária totaliza 60 m^2 . O almoxarifado e a sala da secretária têm formato retangular de mesmas dimensões e a menor parede mede 2 m. Determine a área do escritório, sabendo que ele tem o formato de um quadrado.

Figura 2: Esquema da sala comercial.

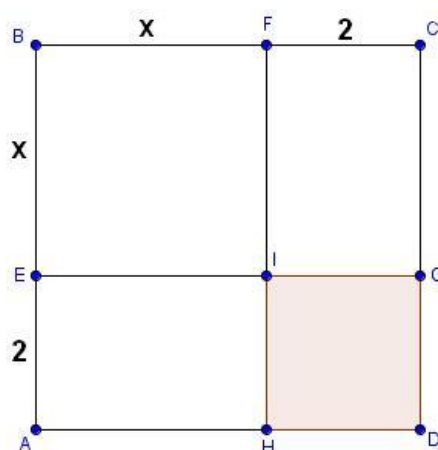


Fonte: Os autores.

Apresentamos a seguir a solução do problema através do método de completar quadrados e pela fórmula de Bhaskara.

Considere o esquema da sala comercial na Figura 3 e seja x um número positivo.

Figura 3: Esquema da sala comercial com suas dimensões.



Fonte: Os autores.

A área do escritório é dada por x^2 e a área do almoxarifado por $2x$, assim como a área da sala da secretária. Dessa forma, a equação que modela a situação descrita no problema é $x^2 + 2x + 2x = 60$, isto é, $x^2 + 4x = 60$. Logo,

$$x^2 + 4x + 4 = 60 + 4 \Rightarrow (x + 2)^2 = 64 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x + 2 = \pm 8$$

$$x_1 = -8 - 2 = -10 \quad \text{ou} \quad x_2 = 8 - 2 = 6.$$

Portanto, $x = 6$ e a área do escritório é $A = 6 \times 6 = 36 \text{ m}^2$.

Já na resolução da equação pela fórmula de Bhaskara, temos:

$$x^2 + 4x - 60 = 0,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 240}}{2} = \frac{-4 \pm 16}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 - 16}{2} = -10 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-4 + 16}{2} = 6,$$

onde $a = 1$, $b = 4$ e $c = -60$, o que fornece o mesmo resultado $A = 6 \times 6 = 36 \text{ m}^2$.

Resolveremos a seguir, através do método de Al-Khwarizmi, um problema modelado pela mesma equação. Esse método de resolução de equações do 2º grau faz uso de construções geométricas que justificam suas regras e, por isso, só é possível encontrar as soluções positivas das equações. Nas atividades desenvolvidas, foi utilizado o *software* GeoGebra⁶ para tornar tais construções possíveis.

Problema: O quadrado de um número positivo adicionado ao quádruplo desse mesmo número resulta em 60. Que número é esse?

⁶ *Software* de geometria dinâmica gratuito para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema.

Considere o quadrado ABCD, Figura 3, cujo lado mede $x + 2$. Assim, temos que o quadrado BFIE possui área x^2 e os retângulos FCGI e EIHA possuem, cada um, área $2x$. Dessa forma, o polígono ABCGIH tem área $x^2 + 4x$. Por outro lado, o polígono IGDH também é um quadrado com lado medindo 2 m e área medindo 4 m^2 . Com isso, temos que a expressão $x^2 + 4x + 4$ representa a área do quadrado ABCD, mas pela equação inicial, temos que $x^2 + 4x = 60$. Assim, segue que a área do quadrado ABCD é $60 + 4 = 64$. Como $\sqrt{64} = 8$, temos que o lado do quadrado ABCD mede 8 , e, portanto, $x = 6$.

O conjunto das atividades foi formado por problemas como os anteriormente descritos e por exercícios clássicos envolvendo equações do 2º grau. Após a aplicação dessas atividades foi possível observar a preferência dos alunos pela fórmula de Bhaskara, com poucos alunos se arriscando a resolver as equações pelo método de completar quadrados. O método geométrico de Al-Khwarizmi não foi aderido por nenhum aluno da turma como o método preferido. Depois do conjunto de atividades trabalhadas em sala, alguns alunos ainda tentaram resolver os problemas utilizando esse método, mas com o passar do tempo, eles acabaram deixando-o de lado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática sempre esteve relacionada com o cotidiano do ser humano e sua necessidade de resolver problemas. Assim, resolver problemas de Matemática deveria ser algo completamente corriqueiro. No entanto, encontramos nas escolas, em geral, alunos com baixo desempenho em Matemática, em especial, no que diz respeito à resolução de problemas.

O emprego dessa metodologia nas aulas de Matemática tem como objetivo corrigir essa situação e possibilita ainda que o aluno venha a desenvolver habilidades e competências importantes, não apenas relacionadas à Matemática, mas também às demais áreas do conhecimento.

Conforme vimos, o ensino da Matemática com a utilização da resolução de problemas pode ser feito de três formas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolução de problemas e ensinar por meio da resolução de problemas. Nesse trabalho, optamos pelo uso da última forma que é ensinar através da resolução de problemas. Aqui, tem-se a resolução de problemas como uma metodologia de ensino e o

problema como um ponto de partida para o professor desenvolver as ideias sobre determinado conteúdo.

O método de resolução de problemas não deve ser visto como uma metodologia exclusiva para o ensino/aprendizagem da Matemática, podendo ser usado também com bastante eficiência em situações do dia a dia.

O foco desse trabalho está no ensino das equações do 2º grau utilizando a resolução de problemas e apresentando aos alunos os métodos de completar quadrados e de Al-Khwarizmi e a fórmula de Bhaskara. Nas atividades aplicadas em sala de aula os alunos apenas apresentaram dificuldades nos problemas que deveriam resolver utilizando o método geométrico de Al-Khwarizmi, o que mostra que os demais métodos foram bem compreendidos pela maioria da turma.

Como resultado dessas atividades, foi possível perceber a preferência dos alunos pela praticidade da aplicação da fórmula de Bhaskara. Em geral, os alunos não queriam ter que pensar em estratégias para solucionar os problemas e, mesmo quando a resolução pela fórmula é mais longa do que se utilizassem outro método, a maioria dos estudantes não deixa de usá-la. Apesar dessa evidência, consideramos importante a apresentação dos três métodos, por disponibilizar uma gama maior de maneiras para resolver essas equações.

Como já foi colocado, o objetivo desse trabalho foi chamar a atenção acerca da metodologia de resolução de problemas e como essa pode contribuir para que o aluno tenha um melhor entendimento dos conteúdos de Matemática a partir de uma situação contextualizada, o que pode contribuir para um aprendizado mais efetivo.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Diferentes olhares em resolução de problemas no Brasil e no Mundo**. Rio Claro: UNESP, 2008.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. de La R. et al. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, p. 35 – 52, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1991.

FERNANDES, J. A. S.; OLIVEIRA, E. B. A resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática em sala de aula. In: **X Encontro Capixaba de Educação Matemática**, 2015.

FURLANETTO, V.; DULLIUS, M. M.; ALTHAUS, N. Estratégias de resolução de problemas para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de matemática. In: **IX ANPED SUL**, v. único. Caxias do Sul: UCS, 2012.

GAY, M. R. G. **Araribá Plus. Matemática. 9º Ano**. São Paulo: Editora Moderna. 4ª ed. 2014.

GODINHO, L. M., CONCORDIDO, C. F. R.; DE CASTRO BARBOSA, A. C. Uma proposta para o ensino de derivada na primeira série do ensino médio no Brasil. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 1, p. 28-39, 2016.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

_____. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Espaço Pedagógico**. Passo Fundo, RS, v. 20, n. 1, p. 88-104, 2013. Disponível em: <<http://www.upf.br/seer/index.php/rep/article/view/3509/2294>>. Acesso em: 14 nov. 2016.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Orgs.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p.299-311, 2012. Disponível em: <<http://www.reveduc.ufscar.br>>. Acesso em: 16 nov. 2016.

SILVA; J. A. F. da; Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na Matemática: algumas considerações. Universidade Católica de Brasília, 2005. Disponível em: <<http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/JoseAugustoFlorentinodaSilva.pdf>>. Acesso em: 16 nov. 2016.

SOARES, F. S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. **Revista Horizontes**. Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, 2004.

SOUSA, A. B. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática**. Universidade Católica de Brasília, 2005. Disponível em: <<http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf>>. Acesso em: 16 nov. 2016.